MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Per Alexandersson
Kursansvarig: Magnus Carlson

Tentamensskrivning i
Algebra och kombinatorik
7.5 hp
11 januari 2022

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna. 15 poäng, inklusive bonus, ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.

1. (a) Hur många *positiva* heltalslösningar har $x_1 + x_2 + x_3 = 2021$? 2p

   (b) Betrakta ekvationen
   $$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(y_1 + y_2 + y_3) = 77.$$
   Hur många *icke-negativa* heltalslösningar existerar till den givna ekvationen? 3p
   (**Dina svar för dessa uppgifter får innehålla kombinatorisk standardnotation från kursen, som ej behöver beräknas eller förenklas, men måste motiveras tydligt.**)

2. (a) Faktorisera polynomet $p(x) = x^4 + x^3 + 2x + 4$ som en produkt av irreducibla polynom när det betraktas som ett polynom med koefficienter i $\mathbb{Z}_3$ 3p

   (b) Finn alla rötter till polynomet $q(x) = x^{2162} - 1$ i $\mathbb{Z}_8$. 2p

3. Låt X vara mängden av 2×3-matriser med element från $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Med andra ord ser ett element av X ut som
   $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$
   där varje $a_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Säg att $A \in X$ är ekvivalent till $B \in X$ om vi kan få B från A genom att permutera kolumnerna och / eller raderna av A.

   a) Bevisa att detta ger en ekvivalensrelation på X. 1p

   b) Finn antalet ekvivalensklasser för denna relation. 4p

4. Låt G vara gruppen $U(\mathbb{Z}_{20})$.

   a) Hur många element har $U(\mathbb{Z}_{20})$? Skriv ner dessa element. 1p

   b) Är gruppen G cyklisk? 1p

   c) Vilka möjliga storlekar finns det för en delgrupp av G? Ge exempel på delgrupper av varje möjlig storlek. 3p

5. a) 20 personer är på en julfest och skall nu alla dansa i en ring. På hur många vis kan dessa personer ställa sig hand i hand i en ring om det dessutom finns två personer, person A och B, som inte skall stå bredvid varandra? 2p

   b) Antag nu istället att de 20 personerna skall dela upp sig i två ringar. I en ring så måste det stå åtminstone en person, men det är OK om endast en person står i ringen. På hur många vis personerna ställa sig i två ringar? 3p
   (**Dina svar får innehålla kombinatorisk standardnotation från kursen, som ej behöver beräknas eller förenklas, men måste motiveras tydligt.**)

6. a) Betrakta permutationerna $\pi = (123)(45)(67)$ och $\tau = (1457)(23)(68)$ i S_8. Skriv ner π^{-1} och $\pi\tau$ på cykelform. 2p

b) Skriv $\gamma = (1245)(678)$ som en produkt av transpositioner. Är γ udda eller jämn? 1p

c) Låt nu $\pi = (123)$ och $\gamma = (45678)$. Låt H vara delgruppen av S_8 genererad av $\pi^{25}\gamma^7$. Vad är indexet av H i S_8? (Kom ihåg att indexet definieras som antalet vänstra sidoklasser av H i S_8) 2p

Lycka till!