Stockholms universitet, Matematiska institutionen

Tentamen i MT7027, Riskmodeller och reservsättning inom sakförsäkring, 13 april 2022, 8:00–13:00.

Examinator: Filip Lindskog, lindskog@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: Alla hjälpmedel på pappersform är tillåtna (böcker, anteckningar, etc.).

Återlämning: meddelas via kursforum.

Argument och beräkningar ska vara tydliga och lätta att följa.

Eventuellt kan approximationerna $1 - \Phi(1) \approx 0.159$, $1 - \Phi(2) \approx 0.023$, $\Phi^{-1}(0.95) \approx 1.64$, $\Phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$, $\Phi^{-1}(0.995) \approx 2.58$ vara användbara, Φ är fördelningsfunktionen för standardnormalfördelningen.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Uppgift 1

Antag en homogen försäkringsportfölj med n kunder som vardera drabbas, oberoende av varandra, av ett Poisson(λ)-fördelat antal skador under det kommande året. Antag att skadebeloppet, om en skada sker, är exponentialfördelad med väntevärde μ tkr. Antag att skadebeloppen är oberoende och oberoende av antalet skador. Försäkringsbolaget har tecknat en återförsäkring av typ SL-skydd med brytpunkt l tkr. Bestäm approximativt, genom en normalapproximation, väntevärdet för återförsäkringsbolagets skadekostnad. Uttryck svaret i givna konstanter samt fördelningsfunktionen Φ för standardnormalfördelningen. (10 p)

Uppgift 2

Figur 1 visar antalet skador per vecka $N_{k,t}$, $t = 1, \dots, 52$, för två försäkringsprodukter $k = 1, 2$ under ett skadeår, samt par $(N_{1,t}, N_{2,t})$, $t = 1, \dots, 52$, av skadeantal per vecka för samtliga 52 veckor. Föreslå en modell för sammanlagt antal skador per år $N_{1,1} + N_{2,1} + \dots + N_{1,52} + N_{2,52}$ och motivera tydligt modellens rimlighet utifrån de tre figurerna i Figur 1. (10 p)

Uppgift 3

Mot slutet av året 2022 bestämmer ett försäkringsbolag 1-årspremien p för 2023. Antag att antalet kunder som tecknar försäkring 2023 är Poissonfördelat med parameter ap^b där $a > 0$ och $b < 0$. Antag att skadekostnaden för en enskild kund under 2023 har väntevärde μ och varians σ^2. Antag även att skadekostnader för olika kunder är oberoende och likafördelade, samt oberoende av antalet kunder. Bestäm väntevärde och varians för nettoresultatet för försäkringar tecknade 2023, d.v.s. total premieintäkt minus total skadekostnad. (10 p)

Uppgift 4

I Tabell 1 visas, för $i \in \{1, \dots, 5\}$ och $j \in \{1, \dots, 3\}$, belopp $C_{i,j}$ som svarar mot summerade betalningar till följd av skador under skadeår i och utvecklingsår $1, \dots, j$. Beloppen för $i + j \leq 6$ är kända medan beloppen är okända för $i + j > 6$. Antag att belopp som svarar mot olika skadeår är oberoende och att det existerar konstanter f_1, f_2 och σ_1, σ_2 så att, för $j = 1, 2$,

$$\mathrm{E}[C_{i,j+1} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = f_j C_{i,j}, \quad \mathrm{Var}(C_{i,j+1} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}.$$

Bestäm väntevärde och varians för den totala summan som betalas som skadeersättning till kunder under det tredje utvecklingsåret till följd av skador under femte skadeåret, uttryckta i kända belopp $C_{i,j}$ med $i + j \leq 6$ och okända konstanterna f_1, f_2 och σ_1, σ_2. (10 p)

	1	2	3
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$
4	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$	$\mathbf{C_{4,3}}$
5	$C_{5,1}$	$\mathbf{C_{5,2}}$	$\mathbf{C_{5,3}}$

Table 1: Skadedata $C_{i,j}$ med kända kumulativa utbetalningar $(i + j \leq 6)$, samt framtida okända kumulativa utbetalningar för $i + j > 6$.

Uppgift 5

Betrakta ett nystartat försäkringsbolag med skulder svarande mot framtida skadekostnader och tillgångar svarande mot just erhållna premieintäkter. Antag att inga försäkringar har tecknats tidigare år och att (märkligt nog) inga fler försäkringar kommer tecknas framöver. Antag att ”nu” är tidpunkt 0 vilket svarar mot början av skadeår 1. Antag att utbetalningar p.g.a. skador sker i slutet av detta år och i slutet av nästa år. Antag följande dynamik för den kumulativa skadekostnaden,

$$C_{1,1} = \exp(\mu_0 + \sigma_0 \varepsilon_{1,1}), \quad C_{1,2} = C_{1,1} \exp(\mu_1 + \sigma_1 \varepsilon_{1,2}),$$

där $\varepsilon_{1,1} \sim N(0,1)$ och $\varepsilon_{1,2} \sim N(0,1)$ är oberoende. Det aktuella skuldkassaflödet motsvarar de inkrementella framtida skadekostnaderna p.g.a. skador under skadeår 1. Antag att försäkringsbolaget har tillgångar med värde K investerat i en 1-årig nollkupongsobligation. Antag att den kontinuerligt sammansatta räntan för alla löptider är konstant och lika med r. Bestäm $\mathrm{VaR}_{0.005}(A_1 - L_1)$, där A_1 och L_1 betecknar värdet av tillgångar respektive skulder om ett år (inklusive kassaflöden under det nuvarande året). Skulden värderas enligt traditionell aktuariell värdering: summan av diskonterade betingade väntevärden. Svaret ska ges i termer av givna storheter samt fördelningsfunktionen för $N(0,1)$. (10 p)

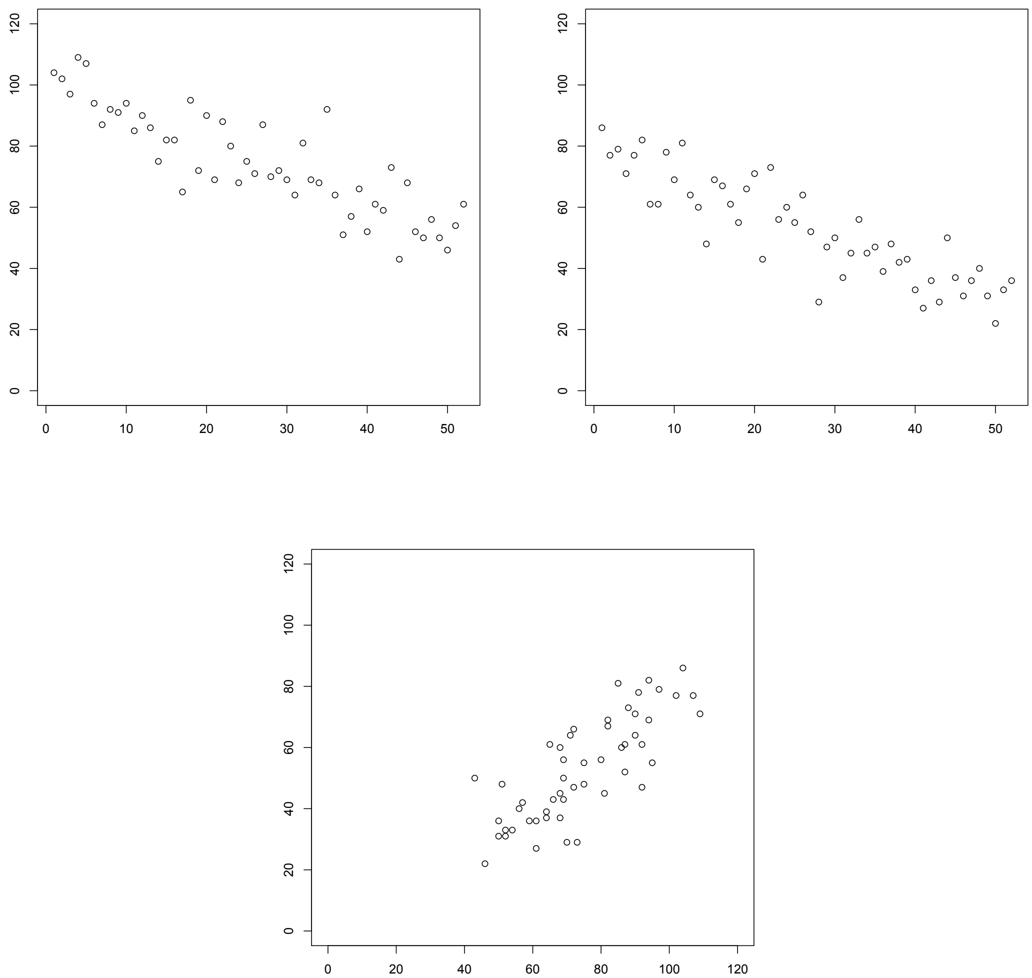

Figure 1: Antal skador per vecka för två försäkringsprodukter (övre figurerna) samt par av veckovisa skadeantal för samtliga 52 veckor (nedre figuren).

Uppgift 1

Skadekostnad för försäkringsbolaget

$$S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N_j} X_{j,k}$$

där alla $X_{k,j}$ är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde μ och varians μ^2. Vidare är alla $X_{k,j}$ oberoende av $N_1, N_2, \dots$ som i sin tur är oberoende och Poissonfördelade med väntevärde λ. Alltså:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[S] &= n\lambda\mu, \\
\mathrm{Var}(S) &= n(\mathrm{E}[N_1]\,\mathrm{Var}(X_{1,1}) + \mathrm{Var}(N_1)\,\mathrm{E}[X_{1,1}]^2) = n\lambda(\mu^2 + \mu^2) = 2n\lambda\mu^2.
\end{aligned}$$

Eftersom S är en summa av oberoende och likafördelade relativt lättsvansade variabler är en normalapproximation med väntevärde och varians enligt S rimlig.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\max(S-l,0)] &= \int_0^\infty \mathrm{P}(\max(S-l,0) > z)dz \\
&= \int_0^\infty \mathrm{P}(S > l + z)dz \\
&\approx \int_0^\infty \mathrm{P}\left(\mathrm{E}[S] + \sqrt{\mathrm{Var}(S)}Z > l + z\right)dz \\
&= \int_0^\infty \left(1 - \Phi\left(\frac{l + z - \mathrm{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right)\right)dz \\
&= \sqrt{\mathrm{Var}(S)} \int_{(l-\mathrm{E}[S])/\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}^\infty \big(1 - \Phi(y)\big)dy
\end{aligned}$$

Uppgift 2

Det är rimligt att initialt anta att $N_{1,t} \sim \mathrm{Poisson}(100-t)$ och $N_{2,t} \sim \mathrm{Poisson}(80-t)$. Vidare antyder den slumpmässiga spridningen över tid t att $N_{1,1}, \dots, N_{1,52}$ är oberoende. Det samma gäller för $N_{2,1}, \dots, N_{2,52}$. Notera att figuren som visar paren $(N_{1,t}, N_{2,t})$ inte antyder stokastiskt beroende, formen kommer av att väntevärdena varierar över tid och på samma sätt för bägge komponenterna. Vi måste troliggöra Poissonantagandet, dvs att $\mathrm{E}[N_{k,t}] = \mathrm{Var}(N_{k,t})$. För $\mu_{k,t}$ någorlunda stor gäller att $\mathrm{Pois}(\mu_{k,t})$ approximeras väl med $N(\mu_{k,t}, \mu_{k,t})$. Om $Z_{k,t} \sim N(\mu_{k,t}, \mu_{k,t})$ gäller att

$$\mathrm{P}(\mu_{k,t} - 2\sqrt{\mu_{k,t}} < Z_{k,t} < \mu_{k,t} + 2\sqrt{\mu_{k,t}}) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \approx 0.95$$

Figur visar samma figur som Figur 1 men med kurvorna $t \mapsto \mu_{k,t} + 2\sqrt{\mu_{k,t}}$ och $t \mapsto \mu_{k,t} - 2\sqrt{\mu_{k,t}}$ utritade. Antalet observationer utanför dessa bör vara $\mathrm{Bin}(52, 0.05)$-fördelade för varje bild. D.v.s. förväntat antal ca 3 per bild. Detta stämmer med vad bilderna visar. Alltså kan vi anta att antalet skador per å för bägge produkterna tillsammans är Poissonfördelat (summan av oberoende Poissonfördelade variabler är

Poissonfördelad) med parameter

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{52}\Big(100-t+80-t\Big) &= 180\cdot 52-2\sum_{t=1}^{52} t \\
&= 180\cdot 52-2\cdot 53\cdot 52/2 \\
&= 52(180-53) \\
&= 52\cdot 127
\end{aligned}
$$

Uppgift 3

$$
\begin{aligned}
R &= Np-\sum_{k=1}^{N} X_k, \\
\mathrm{E}[R] &= \mathrm{E}[N](p-\mathrm{E}[X_1]) = ap^b(p-\mu), \\
\mathrm{Var}(R) &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(R\mid N)]+\mathrm{Var}(\mathrm{E}[R\mid N]) \\
&= \mathrm{E}[N\,\mathrm{Var}(X_1)]+\mathrm{Var}(Np-N\,\mathrm{E}[X_1]) \\
&= \mathrm{E}[N]\sigma^2+\mathrm{Var}(N)(p-\mu)^2 \\
&= ap^b\big(\sigma^2+(p-\mu)^2\big)
\end{aligned}
$$

Uppgift 4

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[C_{5,3}-C_{5,2}\mid \mathcal{D}] &= \mathrm{E}[C_{5,3}-C_{5,2}\mid C_{5,1}] \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}[C_{5,3}\mid C_{5,1},C_{5,2}]\mid C_{5,1}]-\mathrm{E}[C_{5,2}\mid C_{5,1}] \\
&= f_1(f_2-1)C_{5,1}, \\
\mathrm{Var}(C_{5,3}-C_{5,2}\mid \mathcal{D}) &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(C_{5,3}-C_{5,2}\mid C_{5,1},C_{5,2})\mid C_{5,1}] \\
&\quad+\mathrm{Var}(\mathrm{E}[C_{5,3}-C_{5,2}\mid C_{5,1},C_{5,2}]\mid C_{5,1}) \\
&= \mathrm{E}[\sigma_2^2 C_{5,2}\mid C_{5,1}]+\mathrm{Var}((f_2-1)C_{5,2}\mid C_{5,1}) \\
&= (f_1\sigma_2^2+(f_2-1)^2\sigma_1^2)C_{5,1}
\end{aligned}
$$

Uppgift 5

De inkrementella beloppen enligt skade- och utvecklingsår är

$$
\begin{aligned}
D_{1,1} &= \exp(\mu_0+\sigma_0\varepsilon_{1,1}), \\
D_{1,2} &= D_{1,1}(\exp(\mu_1+\sigma_1\varepsilon_{1,2})-1).
\end{aligned}
$$

Skuldkassaflödet är $(X_1,X_2)=(D_{1,1},D_{1,2})$. Detta ger

$$
\begin{aligned}
L_1 &= X_1+e^{-r}\,\mathrm{E}[X_2\mid X_1] \\
&= D_{1,1}+e^{-r}\,\mathrm{E}[D_{1,2}\mid D_{1,1}] \\
&= D_{1,1}+e^{-r}D_{1,1}(e^{\mu_1+\sigma_1^2/2}-1) \\
&= D_{1,1}\Big(1+e^{-r}(e^{\mu_1+\sigma_1^2/2}-1)\Big) \\
&= \exp(\mu_0+\sigma_0\varepsilon_{1,1})c, \quad c=\Big(1+e^{-r}(e^{\mu_1+\sigma_1^2/2}-1)\Big).
\end{aligned}
$$

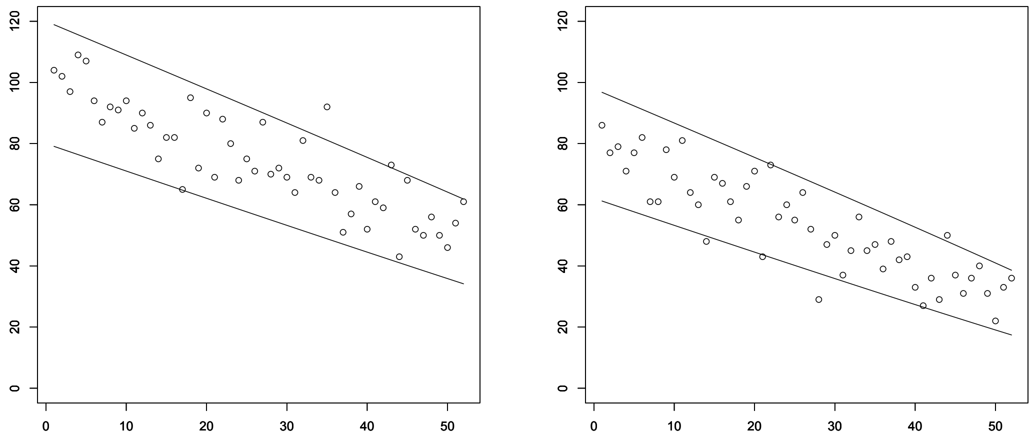

Figure 2: Samma figur som Figur 1 men med kurvorna $t \mapsto \mu_{k,t} + 2\sqrt{\mu_{k,t}}$ och $t \mapsto \mu_{k,t} - 2\sqrt{\mu_{k,t}}$ utritade, där $\mu_{1,t} = 100 - t$ och $\mu_{2,t} = 80 - t$.

Vidare är $A_1 = Ke^r$. Därav följer att

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_{0.005}(A_1 - L_1) &= -K + \mathrm{VaR}_{0.005}(-L_1) \\
&= -K + ce^{-r} F^{-1}_{\exp(\mu_0 + \sigma_0 \varepsilon_{1,1})}(0.995) \\
&= -K + ce^{-r} \exp(\mu_0 + \sigma_0 \Phi^{-1}(0.995))
\end{aligned}$$