STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN
20 april 2022

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

20 april 2022 kl. 8–13

Examinator: Maria Deijfen.
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.
Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast fredag 29 april.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

En anställd väljer varje dag mellan tre arbetsplatser (A,B,C) i ett kontorslandskap. Hon är ombytlig och sitter aldrig på samma plats två dagar i rad. Om hon idag har suttit på plats A, så sitter hon imorgon plats B eller C med sannolikhet 1/2 vardera. Om hon idag har suttit på plats B, så sitter hon imorgon på plats A med sannolikhet 1/3 och på plats C med sannolikhet 2/3. Om hon idag har suttit på plats C, så sitter hon imorgon på plats A med sannolikhet 1/3 och på plats B med sannolikhet 2/3.

a) Beskriv den anställdes val av arbetsplats som en Markovkedja och skriv upp övergångsmatrisen.

b) Beräkna hur stor andel av dagarna som hon i långa loppet kommer att tillbringa på de olika platserna.

Uppgift 2

Kvinnor och män anländer till ett gym enligt oberoende Poissonprocesser med intensitet λ_k respektive λ_m. Gymmet öppnar kl 8 på morgonen.

a) Vilken fördelning har det sammanlagda antalet besökare under de första två timmarna?

b) Vilken fördelning har tiden från öppning tills den första personen (oavsett kön) anländer till gymmet?

c) Vad är sannolikheten att den första personen som anländer är en kvinna?

d) Klockan 8.30 har det fortfarande inte kommit någon man till gymmet. Vilken fördelning har tiden (räknat från 8.30) tills den första mannen anländer?

Uppgift 3

Betrakta en förgreningsprocess där antalet barn per individ beskrivs av en stokastisk variabel Y.

a) Vad är sannolikheten att processen dör ut om $Y \sim \mathrm{Bin}(6, 0.1)$?

b) Var är sannolikheten att processen dör ut om $Y \in \{0, 1, 2\}$ och $\mathbb{P}(Y = 0) = 0.2$, $\mathbb{P}(Y = 1) = 0.3$ och $\mathbb{P}(Y = 2) = 0.5$?

Svårare del

Uppgift 4

Bilar anländer till en bensinpump enligt en Poissonprocess med intensiteten 20 bilar per timme. Om en anländande bilist finner en bil vid pumpen, men ingen köande, så stannar hon med sannolikhet 1/2, om hon finner en bil vid pumpen och en köande så åker hon alltid vidare. Tiden det tar för en bilist att tanka (dvs betjäningstiden vid pumpen) antas vara exponentialfördelad. Av erfarenhet vet man att pumpen är ledig hälften av tiden. Bestäm den genomsnittliga tiden som det tar för en kund att tanka.

Uppgift 5

En katt rör sig mellan rummen i en lägenhet med hall (h), kök (k), ett stort sovrum (s) och ett litet sovrum (l). Katten kommer in i lägenheten via hallen och när den kommer till något av sovrummen lägger den sig och sover där. Kattens förflyttningar kan beskrivas av en Markovkedja i diskret tid med tillståndsrum $\{h, k, s, l\}$ och övergångsmatris

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3/4 & 3/16 & 1/16 & 0 \\ 1/8 & 3/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hur lång tid tar det i genomsnitt innan katten lägger sig för att sova om varje tidssteg i Markovkedjan svarar mot en halv minut?

b) Vad är sannolikheten att katten lägger sig för att sova i det lilla sovrummet (l)?

Uppgift 6

Låt X vara kontinuerligt likformigt fördelad på intervallet $[0, 1]$ och, givet att $X = x$, låt Y vara kontinuerligt likformigt fördelad på intervallet $[0, x^2]$. Låt A beteckna arean av en rektangel med sidlängder X och Y.

a) Beräkna väntevärde och varians för A.

b) Beräkna $\mathbb{P}(A \geq 0.5)$.