Lösningsskisser till tentamen i Algebra, Matematik I, den 5 maj 2022

1. (a) Lösningar x til kongruensen $5x \equiv 3 \pmod{163}$ motsvarar lösningar till den diofantiska ekvationen $5x + 163y = 3$. Vi börjar därför med Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 163 &= 32 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1, \end{aligned}$$

så $\mathrm{SGD}(163, 5) = 1$ och vi kan lösa hjälpekvationen

$$5x + 163y = 1 \tag{1}$$

genom att köra Euklides algoritm baklänges: $1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - 1 \cdot (5 - 1 \cdot 3) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 2 \cdot (163 - 32 \cdot 5) - 1 \cdot 5 = 2 \cdot 163 - 65 \cdot 5 = 5 \cdot (-65) + 163 \cdot 2$. Vi får att $(x, y) = (-65, 2)$ löser hjälpekvationen (1). Multipliceras denna lösning med 3 fås en partikulärlösning $(x, y) = (-195, 6)$ till vår ekvation, så den allmänna lösningen ges därmed av

$$\begin{cases} x = -195 + 163k \\ y = 6 - 5k \end{cases}$$

för $k \in \mathbb{Z}$. Den sökta lösningen x uppfyller $0 < x \leq 163$ vilket ger $k = 2$, som insatt i lösningsformeln ger $x = 131$.

(b) Eftersom 23 är ett primtal ger Fermats lilla sats att $2^{22} \equiv 1 \pmod{23}$, så

$$229^{75} + 2^{224} \equiv (-1)^{75} + 2^{22 \cdot 10 + 4} \equiv -1 + (2^{22})^{10} 2^4 \equiv -1 + 1^{10} \cdot 16 = 15 \pmod{23},$$

så resten är 15.

2. (a) Sanningstabellerna blir

P	Q	$\neg P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow \neg Q$	$P \vee Q$	$\neg Q \Rightarrow P$	$P \wedge \neg Q$
S	S	S	F	S	S	F
S	F	S	S	S	S	S
F	S	S	S	S	S	F
F	F	F	S	F	F	F

så vi ser att det är utsagorna B och C som är ekvivalent med $\neg P \Rightarrow Q$.

(b) Vi låter X beteckna mängden av de 100 talen, och låter $A_d = \{n \in X : d \mid n\}$ vara mängden av tal i X som är delbara med ett heltal d, så vi söker $|A_{30}|$. Vi får

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |X| - |X \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5)| = 100 - 25 = 75,$$

så med inklusion-exklusion får vi

$$\begin{aligned} 75 = |A_2 \cup A_3 \cup A_5| &= |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| \\ &= |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_6| - |A_{10}| - |A_{15}| + |A_{30}| \\ &= 30 + 40 + 40 - 10 - 20 - 12 + |A_{30}| = 68 + |A_{30}| \end{aligned}$$

vilket ger att $|A_{30}| = 7$.

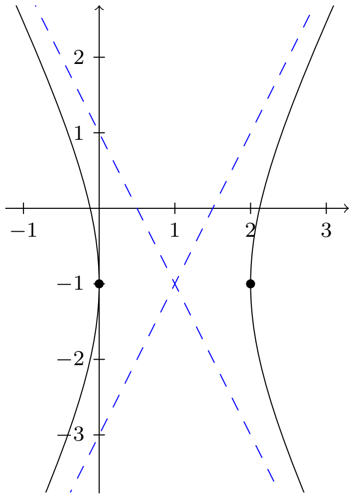
3. (a) Om vi räknar med mellanslaget har vi 10 tecken, varav vi har 4 L och 2 U medan övriga tecken är unika. Antalet sätt att ordna dem är $\frac{10!}{4!2!}$. De förbjudna ordningarna är de som börjar eller slutar med mellanslag. Vardera av dessa fall kan ske på $\frac{9!}{4!2!}$ sätt, så vi får

$$\frac{10!}{4!2!} - 2\frac{9!}{4!2!} = 5\frac{9!}{4!} - \frac{9!}{4!} = 4\frac{9!}{4!} = \frac{9!}{6}$$

olika meningar.

Alternativt kan man börja med att ordna de 9 bokstäverna och sedan välja en av de 8 möjliga positionerna att stoppa in mellanslaget, så vi får $\frac{9!}{4!2!} \cdot 8 = \frac{9!}{6}$ meningar.

(b) Kvadratkomplettering ger den ekvivalenta ekvationen $\dfrac{(x-1)^2}{1^2} - \dfrac{(y+1)^2}{2^2} = 1$. Från denna form ser vi enkelt 2 punkter $(x, y) = (1 \pm 1, -1)$, och att asymptoterna ges av $y + 1 = \pm 2(x-1)$, dvs $y = 2x - 3$ respektive $y = -2x + 1$. Vi skissar grafen:



4. Om $z = 1+i$ är ett nollställe till $p(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 6z + 6$ så är även konjugatet $z = 1 - i$ ett nollställe eftersom $p(z)$ har reella koefficienter, så då gäller att $(z-(1+i))(z-(1-i)) = (z-1)^2 - i^2 = z^2 - 2z + 2$ delar $p(z)$. Polynomdivision ger nu

$$p(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 3),$$

vilket dels bekräftar att $z = 1 + i$ är ett nollställe, dels får vi de 2 sista nollställena från $z^2 + 3 = 0$. Lösningarna till ekvationen är därmed $z = 1 \pm i$ samt $z = \pm\sqrt{3}\, i$.

5. (a) Låt $P = (2, 1, 3)$ och $Q = (1, 0, 2)$. Normalvektorn till planet $2x + y - z = 1$ är $\vec{v} = (2, 1, -1)$. Vårt plan är parallellt med $\vec{v}$ och $\vec{u} = \overrightarrow{QP} = (1, 1, 1)$, så det har normalvektor

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \vec{e}_1 \\ 1 & 1 & \vec{e}_2 \\ -1 & 1 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (2, -3, 1).$$

Planets ekvation är därför $2(x-2) - 3(y-1) + 1(z-3) = 0$, dvs $2x - 3y + z = 4$.

(b) Planet har normal $\vec{n} = (2, -1, -2)$. Linjen L genom P vinkelrät med planet har parameterformen $(x, y, z) = (2 + 2t, -t, 3 - 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Skärningen S med planet fås då $2(2 + 2t) - (-t) - 2(3 - 2t) = 4$, vilket ger $t = \frac{2}{3}$. Avståndet är därmed $|\overrightarrow{PS}| = |\frac{2}{3}\vec{n}| = \frac{2}{3}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 2$, och punkten är $S = (\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$.

6. (a) Första speglingen uppfyller $S_1(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2$, $S(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1$, $S(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$, så S_1 har matrisen $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Rotationen har matris $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ 0 & \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix}$, och den andra spegingen S_2 har matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, så F har matrisen

$$F = S_2 R S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Vi ser att $F = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) & 0 \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ så F innebär en vridning 90° moturs kring z-axeln (sett uppifrån).