

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

1. (4+1 p.) (a) Bestäm alla lösningar till den diofantiska ekvationen

$$49x + 161y = 700.$$

(b) Hur många lösningar har denna diofantisk ekvation i den tredje kvadranten ($x \leq 0$, $y \leq 0$)?

2. (1+4 p.) Betrakta funktionen $f(x) = 2e^x|x - 1|$ där $x \in \mathbb{R}$.

(a) Beräkna derivatan till f i alla punkter där f är deriverbar.

(b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen $f(x) = 1$.

(Beakta att själva lösningarna *inte* behöver beräknas.)

3. (4 p.) Låt matrisen A vara given som $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bevisa med induktion att

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gäller för $n = 1, 2, 3, \dots$, dvs. för alla positiva heltal.

4. (3+3 p.) (a) Skissa området D_1 som ges av $0 \leq x \leq 1$ samt $0 \leq y \leq 3 - 2x$ och beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{D_1} x^2 y \, dx dy.$$

(b) Beräkna

$$\iint_{D_2} \sin \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy,$$

där D_2 begränsas av cirkarna $x^2 + y^2 = \pi^2$ och $x^2 + y^2 = 4\pi^2$.

5. (2+3 p.) (a) Med avseende på en ON-bas, låt P beteckna den ortogonala projektionen på planet $3x - 4z = 0$ i rummet. Beräkna matrisframställningen till P .

(b) Betrakta den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som i standardbasen ges av

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Vilken matrisframställning har F i basen $\mathbb{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$?

6. (2+3 p.) Låt $f(x, y) = x(y^2 - 2y)$.

(a) För varje (x_0, y_0) beräkna tangentplanet till grafen av f i punkten $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

(b) Bestäm alla punkter i vilka tangentplanet till grafen av f är parallellt till planet $y = z$.

Tentamensåterlämning annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!