MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Martin Tamm

Tentamensskrivning i
Analys A,
7,5 hp,
220411

Minst 7,5 poäng (inklusive bonus) på problemdelen krävs för att gå vidare till den muntliga delen. Talen är inte ordnade efter svårighetsgrad. Inga hjälpmedel tillåtna. Samtliga svar måste motiveras.

Problemdel

1. Avgör för var och en av följande generaliserade integraler om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent:

$$a)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx, \qquad b)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x}\,dx.$$

3 p

2. Undersök om följande gränsvärden existerar och beräkna dem i förekommande fall:

$$a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-\sin(xy)+y^2}{x^2+\sin(xy)+y^2}, \qquad b)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-\sin(x^2y^2)+y^2}{x^2+\sin(x^2y^2)+y^2}.$$

3 p

3. a) Transformera differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y},$$

till de nya variablerna u och v, där $u = x + y$ och $v = x - y$. 2 p

b) Bestäm den allmänna lösningen till den partiella differentialekvationen i a-uppgiften. 1 p

4. Betrakta funktionen $f(x,y,z) = (1-x^2-y^2-z^2)e^{x+y+z}$. Avgör om f antar något största/minsta värde på $\mathbb{R}^3$ och bestäm max och min i förekommande fall. Bestäm även de kritiska punkternas karaktär. 3 p

5. Avgör om funktionen $f(x,y,z) = xyz$ antar största och minsta värde på mängden

$$D = \{(x,y,z) : x^3 + y^3 + z^3 = 3 \text{ och } x,y,z \geq 0\},$$

samt bestäm max och min i förekommande fall. 3 p

Teoridel

6. Visa med utgångspunkt från definitionen $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, där n är en heltalsvariabel, att $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)/x = 1$ och $\lim_{x\to 0}(e^x-1)/x = 1$. 3 p

7. Formulera och bevisa kedjeregeln för sammansatta funktioner av typ $t \mapsto f(g(t),h(t))$. 3 p

LYCKA TILL!

Skrivningsresultatet kommer att finnas tillgängligt senast måndag den 18 april (sannolikt tidigare). Beslut om återlämning av tentorna kommer att fattas med hänsyn till rådande omständigheter och meddelas via kurssidan.