Lösningar till tentamen

Analys A,
22-04-11.

1.a) Vi noterar att

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Eftersom

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

följer det av jämförelsekriterium 1 att integralen är absolutkonvergent.

b) För att visa att integralen är konvergent använder vi partialintegrering:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x}\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{\sin x}{1+x}\, dx =$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(\left[-\frac{\cos x}{1+x} \right]_0^N - \int_0^N \frac{\cos x}{(1+x)^2}\, dx \right).$$

Den första termen går mot 1 och den följande integralen är absolutkonvergent av liknande skäl som integralen i a), eftersom

$$0 \leq \left| \frac{\cos x}{(1+x)^2} \right| \leq \frac{1}{(1+x)^2},$$

och

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}\, dx = 1.$$

Detta visar att integralen konvergerar, men för att kunna konstatera att integralen inte är absolutkonvergent måste vi även visa att motsvarande integral med belopp divergerar. Vi observerar därför att

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{1+x} \right| dx \geq \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x}\, dx =$$

$$\int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}{1+x}\, dx =$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(\left[\frac{1}{2}(\ln(1+x) \right]_0^N - \frac{1}{2} \int_0^N \frac{\cos 2x}{1+x}\, dx \right).$$

Här är nu den första termen divergent medan den andra är konvergent av liknande skäl som tidigare. Det följer att den ursprungliga integralen inte är absolutkonvergent utan alltså i stället betingat konvergent.

2.a) Vi undersöker gränsvärdena längs x-axeln och längs linjen $x = y$:

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 - \sin(t^2) + t^2}{t^2 + \sin(t^2) + t^2} = \frac{1}{3}.$$

Då vi får olika gränsvärden längs de båda linjerna saknar funktionen gränsvärde i origo.

b) I det här fallet observerar vi att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - \sin(x^2y^2) + y^2}{x^2 + \sin(x^2y^2) + y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \dfrac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2}}{1 + \dfrac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Här har vi använt att $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2} = 0$ eftersom $\left| \dfrac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2} \right| \leq r^2 \to 0$ då $r \to 0$.

2.a) Vi räknar med kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Ytterligare en derivation ger

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

På samma sätt beräknas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Insättning i H.L. och V.L. ger nu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial u}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v},$$

dvs vi erhåller ekvationen

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 2\frac{\partial f}{\partial u}.$$

b) Vi delar med 2 och sätter $g = \frac{\partial f}{\partial u}$. Då uppfyller g ekvationen

$$2\frac{\partial g}{\partial v} = g \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{1}{2}g = 0.$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn $I = e^{-v/2}$ kan ekvationen skrivas

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big(e^{-v/2}g\Big) = 0 \Leftrightarrow e^{-v/2}g = \phi(u) \Leftrightarrow g = \phi(u)e^{v/2},$$

för någon godtycklig funktion $\phi(u)$ av u. Om vi går tillbaka till f får vi alltså

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \phi(u)e^{v/2} \Leftrightarrow f = \Phi(u)e^{v/2} + \Psi(v),$$

där $\Phi(u)$ är en primitiv till $\phi(u)$ och $\Psi(v)$ är en godtycklig funktion av v. Återgång till de ursprungliga variablerna x, y ger till sist

$$f(x,y) = \Phi(x+y)e^{(x-y)/2} + \Psi(x-y),$$

där Φ och Ψ är två godtyckliga två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner.

4. Vi visar att funktionen är obegränsad neråt genom att undersöka t ex gränsvärdet

$$\lim_{t\to\infty} f(t,0,0) = \lim_{t\to\infty}(1-t^2)e^t = -\infty,$$

För maximum konstaterar vi att funktionen är negativ utanför det kompakta klotet $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^z \le 1\}$, och att maximum av f över $\mathbb{R}^3$ måste antas, då det tydligen måste vara lika med maximum över B, som antas eftersom B är kompakt.

Vi beräknar de stationära punkterna:

$$\begin{cases} f'_x &= (1-x^2-y^2-z^2-2x)e^{x+y+z} = 0, \\ f'_y &= (1-x^2-y^2-z^2-2y)e^{x+y+z} = 0, \\ f'_z &= (1-x^2-y^2-z^2-2z)e^{x+y+z} = 0. \end{cases}$$

Ur dessa ekvationer följer att $x = y = z$ (alla tre är lika med $\frac{1}{2}(1-x^2-y^2-z^2)$). Insättning av detta i valfri av ekvationerna ger att $1-3x^2-2x = 0$, med de två lösningarna $x = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$, ger de två punkterna $(-1,-1,-1)$ och $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Den första punkten ligger utanför B, så den kan omöjligt vara en maxpunkt. Det återstår därför endast en punkt som därför måste vara den sökta maxpunkten med maxvärdet $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2e}{3}$.

För den andra stationära punkten $(-1,-1,-1)$ får vi

$$f''_{xx}(-1,-1,-1) = f''_{yy}(-1,-1,-1) = f''_{yy}(-1,-1,-1) = 0,$$

$$f''_{xy}(-1,-1,-1) = f''_{yz}(-1,-1,-1) = f''_{xz}(-1,-1,-1) = \frac{2}{e^{-3}},$$

vilket ger den kvadratiska formen $Q(h,k,l) = 4e^{-3}(hk+kl+hl)$ som är indefinit, t ex eftersom $Q(1,1,0) > 0$ och $Q(1,-1,0) < 0$. Punkten är alltså en sadelpunkt.

5. Eftersom alla termerna i vänsterledet av $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ är positiva kan ingen av dom vara större än 3. Det följer att mängden D är innehållen i mängden

$$\{(x,y,z) : 0 \le x \le \sqrt[3]{3}, 0 \le y \le \sqrt[3]{3}, 0 \le z \le \sqrt[3]{3}\}$$

som är begränsad. Eftersom D dessutom är sluten följer att den också är kompakt, vilket garanterar att både max och min måste antas. Dessa måste antas antingen i stationära punkter eller på randen som i detta fall består av punkter där x, y, eller z är noll. Eftersom $f(x,y,z) \ge 0$ och likhet dessutom gäller på randen måste globalt min vara noll och maximum måste därför antas i en stationär punkt.

För att hitta extrempunkterna inför vi Lagrange-funktionen

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x^3+y^3+z^3-3),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_x &= yz + \lambda 3x^2 = 0, \\ F'_y &= xz + \lambda 3y^2 = 0, \\ F'_z &= xy + \lambda 3z^2 = 0. \end{cases}$$

Vi kan anta att $\lambda \ne 0$, eftersom annars något av talen x, y, eller z måste vara noll och därmed måste punkten ligga på randen. I detta fall ser vi, genom att multiplicera ekvationerna med x, y och z respektive, att

$$x^3 = y^3 = z^3 \quad \left(= \frac{xyz}{3\lambda}\right).$$

Det följer att $x^3 + x^3 + x^3 - 3 = 0$, dvs $x = 1$, och därmed blir även $y = z = 1$. Detta ger den unika kritiska punkten $(1,1,1)$, som alltså måste vara maxpunkten, och motsvarande maxvärde $f(1,1,1) = 1$.

För frågorna 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen

/Martin Tamm/220411/