Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Analys, Matematik I, den 17 maj 2022

1. (a) Förlänger vi med rotuttryckets konjugat får vi

$$\lim_{x\to\infty} x\left(1-\sqrt{1+\frac{3}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)}{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = -\frac{3}{2}.$$

(b) Med standardutvecklingarna $\sin(t) = t - t^3/3! + O(t^5)$, $\ln(t) = t - t^2/2 + O(t^3)$ och $e^t = 1 + t + O(t^2)$ då $t \to 0$ får vi

$$\frac{x\sin(x) - \ln(1+x^2)}{e^{x^4}-1} = \frac{x(x - x^3/6 + O(x^5)) - (x^2 - x^4/2 + O(x^6))}{1 + x^4 + O(x^8) - 1}$$
$$= \frac{x^4/3 + O(x^5)}{x^4 + O(x^8)} = \frac{1/3 + O(x)}{1 + O(x^4)} \to \frac{1}{3}$$

då $x \to 0$.

2. Vi har att funktionen $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)$ är definierad för alla $x \neq 0$, så den enda möjliga vertikala asymptoten är linjen $x = 0$, men med variabelbytet $t = \frac{x+1}{x}$ får vi $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2}$ och $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$, så vertikal asymptot saknas. Däremot får vi

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{t\to 1} \arctan(t) = \frac{\pi}{4},$$

så $y = \frac{\pi}{4}$ är horisontell asymptot då $x \to \pm\infty$.

Vi får

$$f'(x) = \frac{-1}{2x^2+2x+1}, \qquad f''(x) = \frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2},$$

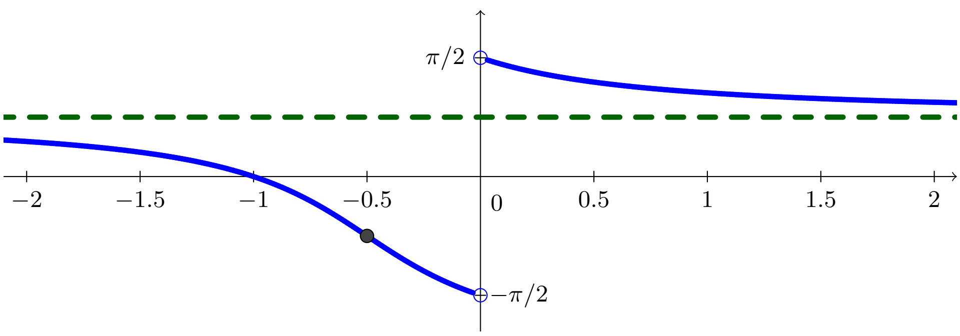
för $x \neq 0$, $f'(x) < 0$ för alla $x \neq 0$.

Vi har $f''(x) = 0$ endast för $x = -1/2$, och vi gör en teckentabell

x		-1/2		0	
$f'(x)$	-	-	-	≀	-
$f(x)$	↘	↘	↘	≀	↘
$f''(x)$	-	0	+	≀	+
$f(x)$	⌢	infl.	⌣	≀	⌣

Från teckentabellen ser vi att funktionen saknar lokala extremvärden, men har en inflektionspunkt vid $x = -1/2$. Funktionen är konkav på intervallet $]-\infty, -1/2[$, och konvex på intervallen $]-1/2, 0[$ och $]0, \infty[$.

Vi har nu tillräcklig information för att kunna rita en skiss av grafen:



Slutligen ser vi att funktionens värdemängd är $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

3. I polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ motsvaras området D av området $E = \{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le r\le\sqrt{2},\ -\pi/2\le\theta\le\pi/2\}$ i $r\theta$-planet. Vi får

$$\begin{aligned}\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dxdy &= \iint_E \ln(1+r^2)r\,drd\theta \\ =&\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\int_1^{\sqrt{2}} r\ln(1+r^2)\,dr = \left[t=1+r^2,\ r\,dr=\frac{1}{2}dt\right] \\ =&\frac{\pi}{2}\int_2^3 \ln(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\Big[t\ln(t)-t\Big]_{t=2}^{t=3} = \frac{\pi}{2}\Big(3\ln(3)-1-2\ln(2)\Big).\end{aligned}$$

4. Funktionen $f(x,y) = (2y+1)e^{x^2-y}$ är kontinuerlig på en kompakt mängd, samt partiellt deriverbar överallt, så enligt en känd sats finns globala maximum och minimum och dessa antas i inre stationära punkter eller på randen.

   Vi börjar med att bestämma de stationära punkterna. Vi får

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x(2y+1)e^{x^2-y} \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = (1-2y)e^{x^2-y} \end{cases}$$

   Från den andra ekvation får vi att $y = 1/2$, men då ger den första ekvation att $x = 0$. Så vi får endast den stationära punkten $(x,y) = (0,1/2)$, som tillhör området och därmed är en kandidat.

   Den övre kanten $y = 1$, för $-1\le x\le 1$, ger $g(x) = f(x,1) = 3e^{x^2-1}$, med $g'(x) = 6xe^{x^2-1}$ så $g'(x) = 0$ endast för $x = 0$, vilket ger kandidatpunkten $(0,1)$.

   Kanten $y = x^2$, för $-1\le x\le 1$, ger $h(x) = f(x,x^2) = 2x^2+1$ så $h'(x) = 2x$, så $h'(x) = 0$ omm $x = 0$ vilket ger kandidatpunkten $(0,0)$.

   De två hörnpunkterna $(\pm1,1)$ är de sista kandidaterna.

   Jämför vi nu de funktionsvärdena i kandidatpunkterna får vi $f(0,1/2) = 2/\sqrt{e}$, $f(0,0) = 1$, $f(\pm1,1) = 3$ samt $f(0,1) = 3/e$, så vi ser att största värdet är $f(\pm1,1) = 3$ och det minsta är $f(0,0) = 1$.

5. (a) Vi multiplicerar den linjära differentialekvationen $y' - \tan(x)y = 1$ med den integrerande faktorn $e^{\ln(\cos(x))} = \cos x$ och får då

$$(y\cos(x))' = \cos(x).$$

   Integrerar vi båda sidor får vi $y\cos(x) = \sin(x) + C$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger nu att $C = 1$, så $y(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$.

   (b) Differentialekvationen är separabel, om vi skriver om den som $y\,y' = \frac{1}{x^2}$ och integrerar båda sidor får vi $\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{x} + C$. Utnyttjar vi begynnelsevillkoret $y(1) = 1$ får vi $C = 3/2$, vilket ger $y = \pm\sqrt{3-\dfrac{2}{x}}$. Använder vi nu begynnelsevillkoret igen får vi att $y = \sqrt{3-\dfrac{2}{x}}$.

6. Vi sätter $f(x) = e^x$ och $g(x) = 2 + \ln x$. Tangenten till grafen $y = f(x)$ i en punkt $(a, f(a))$ ges av $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ vilket efter förenkling blir

$$y = e^a x + e^a(1 - a).$$

Tangenten till grafen $y = g(x)$ i en punkt $(b, g(b))$ ges av $y - g(b) = g'(b)(x - b)$ vilket efter förenkling blir

$$y = \frac{1}{b}x + \ln(b) + 1$$

Dessa två tangenter sammanfaller om och endast om

$$\begin{cases} e^a = \frac{1}{b} \\ e^a(1-a) = \ln(b) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = e^{-a} \\ e^a(1-a) = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = e^{-a} \\ (e^a - 1)(1 - a) = 0, \end{cases}$$

så vi får $(a, b) = (0, 1)$ eller $(1, 1/e)$. Det finns alltså precis två gemensamma tangenter och de har ekvationerna $y = x + 1$ respektive $y = ex$.