STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sofia Tirabassi

Exam / Tentamen
MM5024 Logik 7,5 hp
VT 2022
Tisdag, 2022-05-31

This exam consists of two parts. The basic part (grundläggande del) has 6 problems (1–6), worth a total of 20 points. The problem part (problemdel) has 3 problems (7–9), worth a total of 20 points. You can obtain a maximum of 40 points.

You may submit your answers in either English (pp. 2–3) or Swedish (pp. 4–5). In case of ambiguity the English text is the one that holds.

No aids are allowed besides paper and pen. Write clearly and motivate your answers carefully. All yes/no answers should be justified. You may use the soundness and completeness theorems (and any other theorems from the course), but state clearly when you do so.

——— Good luck! — Lycka till! ———

Written Exam (English)

Basic part

1 (4 p.) Give the case for the following rules in the proof of soundness for predicate logic

(a) $\wedge$-I

(b) $\exists$-E

You may use, if necessary, the following substitution lemma: for any formula φ and term t, with t free for x_i in φ, and for any structure $\mathcal{A}$ and valuation v for $\mathcal{A}$,

$$[\![\varphi[t/x_i]]\!]^{\mathcal{A},v} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v\left[x_i \mapsto [\![t]\!]^{\mathcal{A},v}\right]}.$$

2 (2 p.)Consider the formulas $\varphi := (P_1 \to P_2) \to P_3$ and $\psi := P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$.

(a) Give a model $\mathcal{V}$ where they are both false

(b) Give two models $\mathcal{V}_1$ and $\mathcal{V}_2$ such that just φ holds in $\mathcal{V}_1$ and just ψ holds in $\mathcal{V}_2$

3 (4 p.) Work over the arity type $\langle\, 2\,;\ \rangle$ (a single binary relation symbol). Let $\mathcal{R}$ be the structure $\langle\, \mathbb{R}\,;\, <\,;\ \rangle$, and let $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ be the valuation with $v(i) = 0$ for all i, i.e. interpreting all variables as $0 \in \mathbb{R}$.

(4 p.) Compute the following truth-values:

(a) $[\![P_1(x_1, x_2) \to P_1(x_2, x_1)]\!]^{\mathcal{R},v}$

(b) $[\![\forall x_2\ (P_1(x_1, x_2) \to P_1(x_2, x_1))\,]\!]^{\mathcal{R},v}$

4 (4 p.)

(a) Show that $(P_1 \to P_3) \vee (P_2 \to P_3) \nvdash (P_1 \vee P_2) \to P_3$.

(b) Find an error in the following derivation of $(P_1 \to P_3) \vee (P_2 \to P_3) \vdash (P_1 \vee P_2) \to P_3$:

$$
\dfrac{\dfrac{(A \to C) \vee (B \to C) \qquad \dfrac{[A \vee B]^1 \quad \dfrac{[A \to C]^2 \quad [A]^3}{C}{\scriptstyle \to E} \quad \dfrac{[B \to C]^2 \quad [B]^3}{C}{\scriptstyle \to E}}{C}{\scriptstyle \vee E_3} \qquad \dfrac{[A \vee B]^1 \quad \dfrac{[A \to C]^2 \quad [A]^4}{C}{\scriptstyle \to E} \quad \dfrac{[B \to C]^2 \quad [B]^4}{C}{\scriptstyle \to E}}{C}{\scriptstyle \vee E_4}}{C}{\scriptstyle \vee E_2}}{(A \vee B) \to C}{\scriptstyle \to I_1}
$$

5 (2 p.)Take φ to be the formula $\forall x_2, x_3\, \neg P_1(x_3, x_2, x_4, x_5)$.

(a) Give a term t and a variable x_j such that t is free for x_j in φ.

(b) Give a term s and a variable x_i such that s is not free for x_i in φ.

6 (a) (4 p.)Find the error in the following derivation of $\forall x_1\ (P_1(x_1) \to P_2(x_1)) \vdash (\exists x_1\, P_1(x_1)) \to (\exists x_1\, P_2(x_1))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x_1\, P_1(x_1)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x_1\ (P_1(x_1)\to P_2(x_1))}{P_1(x_1)\to P_2(x_1)}\,\forall E \qquad [P_1(x_1)]^2}{P_2(x_1)}\,\to E}{P_2(x_1)}\,\exists E^2}{\exists x_1\, P_2(x_1)}\,\exists I}{(\exists x_1\, P_1(x_1)) \to (\exists x_1\, P_2(x_1))}\,\to I^1$$

(b) Give a (correct) derivation of $\forall x_1\ (P_1(x_1) \to P_2(x_1)) \vdash (\exists x_1\, P_1(x_1)) \to (\exists x_1\, P_2(x_1))$.

Problem part

7 (6 p.)Let Γ be the propositional theory $\Gamma \coloneqq \{\neg P_1, \neg P_2, \neg P_3, \ldots\}$.

(a) Show that Γ is consistent

(b) Let Γ^* be a maximal consistent extension of Γ. Decide whether $(P_2 \to P_3) \to P_2$ is an element of Γ^*.

8 (2 p.) Give a derivation showing that

$$\neg(\forall x_1\ (\varphi \wedge \psi)) \vdash \exists x_1\ (\neg\varphi \vee \neg\psi).$$

(You may assume, if required, that x_1 does not occur bound in φ or ψ.)

9 (12 p.)We work under the arity type $< 2; 2 >$ with one function binary predicate P_1 and one binary function f_1

(a) Give a formula that is true in $(\mathbb{R}; <; +)$ and false in $(\mathbb{R}; \geq; +)$.

(b) Give a formula that is true in $(\mathbb{R}; <; +)$ and false in $(\mathbb{R}; <; -)$.

(c) Give a formula that is true in $(\mathbb{R}; <; \times)$ and false in $(\mathbb{R}; >; \times)$.

(d) Consider the forumla

$$\psi \coloneqq \exists x_1, x_2\, \forall x_3\ (P_1(x_1, f_1(x_3, x_3)) \wedge P_1(f_1(x_3, x_3), x_2))$$

Give an interpretation in which ψ is true and another in which it is false.

——— End of exam ———

Skriftligt prov (Svenska)

Grundläggande del

1 (4 p.) Ge fallen för följande regler i sundhetsbeviset för predikatlogik.

(a) $\wedge$-I

(b) $\exists$-E

Du får använda, om nödvändigt, följande substitutionslemma: För varje formel φ och term t, så att t är fri för x_i i φ, och för varje tolkning $\mathcal{A}$, v,

$$[\![\varphi[t/x_i]]\!]^{\mathcal{A},v} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v\left[x_i \mapsto [\![t]\!]^{\mathcal{A},v}\right]}.$$

2 (2 p.)Betrakta formeln $\varphi := (P_1 \to P_2) \to P_3$ och $\psi := P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$.

(a) Ge en model $\mathcal{V}$, var bägge är falska

(b) Ange två modeller $\mathcal{V}_1$ och $\mathcal{V}_2$ sådana att bara φ gäller i $\mathcal{V}_1$ och bara ψ gäller $\mathcal{V}_2$

3 (4 p.) Arbeta med ställighetstypen $\langle 2\,;\ \rangle$ (en enda tvåställig relationssymbol). Låt $\mathcal{R}$ vara strukturen $\langle \mathbb{R}\,;\, <\,;\ \rangle$, och låt $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vara värderingen med $v(i) = 0$ för varje i, d.v.s. så att alla variabler värderas som $0 \in \mathbb{R}$.

(4 p.) Beräkna följande sanningsvärden:

(a) $[\![P_1(x_1, x_2) \to P_1(x_2, x_1)]\!]^{\mathcal{R},v}$

(b) $[\![\forall x_2\ (P_1(x_1, x_2) \to P_1(x_2, x_1))\,]\!]^{\mathcal{R},v}$

4 (4 p.)

(a) Visa att $(P_1 \to P_3) \vee (P_2 \to P_3) \nvdash (P_1 \vee P_2) \to P_3$.

(b) Hitta ett fel i följande härledning av $(P_1 \to P_3) \vee (P_2 \to P_3) \vdash (P_1 \vee P_2) \to P_3$:

$$\dfrac{\dfrac{(A \to C) \vee (B \to C) \qquad \dfrac{[A \vee B]^1 \quad \dfrac{[A \to C]^2 \quad [A]^3}{C}{\to}E \quad \dfrac{[B \to C]^2 \quad [B]^3}{C}{\to}E}{C}{\vee}E_3 \qquad \dfrac{[A \vee B]^1 \quad \dfrac{[A \to C]^2 \quad [A]^4}{C}{\to}E \quad \dfrac{[B \to C]^2 \quad [B]^4}{C}{\to}E}{C}{\vee}E_4}{C}{\vee}E_2}{(A \vee B) \to C}{\to}I_1$$

5 (2 p.)Låt φ vara formeln $\forall x_2, x_3\, \neg P_1(x_3, x_2, x_4, x_5)$.

(a) Ge en term t och variabel x_j sådan att t är fri för x_j i φ.

(b) Ge en term s och variabel x_i sådan att s är fri för x_i i φ.

6 (a) (4 p.)Hitta felet i följande härledning av $\forall x_1\ (P_1(x_1) \to P_2(x_1)) \vdash (\exists x_1\, P_1(x_1)) \to (\exists x_1\, P_2(x_1))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x_1\, P_1(x_1)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x_1\ (P_1(x_1) \to P_2(x_1))}{P_1(x_1) \to P_2(x_1)}\,\forall E \qquad [P_1(x_1)]^2}{P_2(x_1)}\,\to E}{P_2(x_1)}\,\exists E^2}{\exists x_1\, P_2(x_1)}\,\exists I}{(\exists x_1\, P_1(x_1)) \to (\exists x_1\, P_2(x_1))}\,\to I^1$$

(b) Ge en (korrekt) härledning av $\forall x_1\ (P_1(x_1) \to P_2(x_1)) \vdash (\exists x_1\, P_1(x_1)) \to (\exists x_1\, P_2(x_1))$.

Problemdel

7 (6 p.)Låt Γ vara den propositionella teorin $\Gamma := \{\neg P_1, \neg P_2, \neg P_3, \ldots\}$.

(a) Visa att Γ är konsistent.

(b) Låt Γ^* vara en maximalt konsistent utvidgning av Γ. Bestäm om $(P_2 \to P_3) \to P_2$ är ett element i Γ^*.

8 (2 p.) Ge ett härdledning som visar att

$$\neg(\forall x_1\ (\varphi \wedge \psi)) \vdash \exists x_1\ (\neg\varphi \vee \neg\psi).$$

(Om nödventig kan du anta att x_1 inte förekommer bunden i φ eller ψ.)

9 (12 p.)Betrakta aritetet $< 2; 2 >$, med en tvåställig relationsymbol P_1 och en tvåställig funktionsymbol P_1

(a) Ge en formel som er sant i $(\mathbb{R}; <; +)$ och falsk i $(\mathbb{R}; \geq; +)$.

(b) Ge en formel som er sant i $(\mathbb{R}; <; +)$ och falsk i $(\mathbb{R}; <; -)$.

(c) Ge en formel som er sant i $(\mathbb{R}; <; \times)$ och falsk i $(\mathbb{R}; >; \times)$.

(d) Betrakta formeln

$$\psi := \exists x_1, x_2\, \forall x_3\ (P_1(x_1, f_1(x_3, x_3)) \wedge P_1(f_1(x_3, x_3), x_2))$$

Ge en tolkning där ψ är sant, och enn anna tolkning där ψ är falsk.

——— Slut på provet ———