MT5002 – Sannolikhetsteori II – tentamen

Datum Torsdag 2 juni, 2022
Examinator Daniel Ahlberg
Hjälpmendel Formelblad som delas ut med tentamen.
Bedömning Tentamen består av sex uppgifter om tio poäng vardera, och indelade i en teori- och en problemdel. Dessutom har ett antal inlämningsuppgifter under kursens gång kunnat generera upp till sex ytterligare poäng. Bonuspoängen kan tillgodoräknas för tentamens problemdel, men ej för teoridelen. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen (bonuspoäng inräknade):

	A	B	C	D	E
Teoridel	15	15	10	10	10
Problemdel	40	36	32	28	24

Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Teori 1. Låt X och Y vara icke-negativa heltalsvärda stokastiska variabler.

(a) Definiera den sannolikhetsgenererande funktionen för X och Y. (2p)

(b) Visa att om X och Y är oberoende så gäller $g_{X+Y} = g_X \cdot g_Y$. (3p)

(c) Visa att om $g_X = g_Y$ så gäller $p_X = p_Y$. (5p)

Teori 2. Låt (X, Y) vara en slumpvektor.

(a) Definiera den betingade fördelningen av Y givet $X = x$ i fallet då (X, Y) är diskret. (2p)

(b) Definiera den betingade fördelningen av Y givet $X = x$ i fallet då (X, Y) är kontinuerlig. (2p)

(c) Antag att $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ och visa att $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$ i antingen det diskreta eller det kontinuerliga fallet. (6p)

Problem 3. Låt X och Z vara oberoende stokastiska variabler där X är likformigt fördelad på intervallet $[0, 1]$ och Z Bernoulli-fördelad med parameter $1/2$, samt sätt $Y = X(2Z - 1)$.

(a) Bestäm kovariansmatrisen för slumpvektorn (X, Y). (5p)

(b) Avgör huruvida X och Y är oberoende eller ej. (3p)

(c) Motivera om (X, Y) har en täthet eller ej, till exempel med hjälp av en figur. (2p)

Problem 4. Låt X_1, X_2 vara oberoende standard normalfördelade stokastiska variabler. Sätt $Z = (X_1, X_2 + X_1, X_2 - X_1)$.

(a) Bestäm fördelningen för Z och avgör om Z har en täthet. (5p)

(b) Bestäm den betingade fördelningen av $X_2 + X_1$ givet $X_1 = x$. (3p)

(c) Beräkna $\mathbb{E}\left[(X_1 + X_2)^2(X_2 - X_1)^2\right]$. (2p)

Problem 5. Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende och likafördelade stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians 1. Låt stickprovsmedelvärdet $\bar{X}$, stickprovsvariansen s_n^2 och statistikan T_n vara definierade som följer:

$$\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad s_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 \quad \text{och} \quad T_n := \frac{\bar{X}}{\sqrt{s_n^2/n}}.$$

(a) Förutsatt att $s_n^2 \xrightarrow{p} 1$ då $n \to \infty$, visa att $T_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ då $n \to \infty$. (5p)

(b) Visa att $s_n^2 \xrightarrow{p} 1$ då $n \to \infty$. (5p)

Problem 6. För varje $n \geq 1$, låt $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \ldots$ vara oberoende och likafördelade icke-negativa och heltalsvärda stokastiska variabler vars sannolikhetsgenererande funktion ges av $g(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}t + \frac{1}{2}t^2$. Låt $X_0 = 1$ och definiera

$$X_n := Y_1^{(n)} + \ldots + Y_{X_{n-1}}^{(n)} \quad \text{för } n \geq 1.$$

Följden $(X_n)_{n\geq 0}$ är en så kallad Galton-Watson process, där X_n kan tolkas som antalet individer i generation n i en population som börjar med en individ.

(a) Bestäm väntevärdet av variablerna $Y_k^{(n)}$. (3p)

(b) Visa att $\mathbb{E}[X_n] \to \infty$ då $n \to \infty$. (4p)

(c) Låt $T := \sup\{n \geq 0 : X_n \geq 1\}$ ange antalet generationer som populationen existerar. Bestäm sannolikheten för att populationen överlever, dvs att T är oändlig. (3p)