MT5002 – Sannolikhetsteori II – tentamen

Datum Torsdag 11 augusti, 2022
Examinator Daniel Ahlberg
Hjälpmendel Formelblad som delas ut med tentamen.
Bedömning Tentamen består av sex uppgifter om tio poäng vardera, och indelade i en teori- och en problemdel. Dessutom har ett antal inlämningsuppgifter under kursens gång kunnat generera upp till sex ytterligare poäng. Bonuspoängen kan tillgodoräknas för tentamens problemdel, men ej för teoridelen. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen (bonuspoäng inräknade):

	A	B	C	D	E
Teoridel	15	15	10	10	10
Problemdel	40	36	32	28	24

Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Teori 1.

(a) Definiera begreppet konvergens i sannolikhet. (2p)

(b) Formulera svaga formen av stora talens lag. (3p)

(c) Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara en följd av stokastiska variabler och a en konstant. Visa att om $X_n \xrightarrow{p} a$ då $n \to \infty$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i a, så gäller $g(X_n) \xrightarrow{p} g(a)$ då $n \to \infty$. (5p)

Teori 2. Låt $X \sim N(0, I)$ vara en n-dimensionel multivariat normalfördelad slumpvektor, där I betecknar identitetsmatrisen.

(a) Visa att komponenterna av vektorn X är oberoende. (5p)

(b) Visa att sickprovsmedelvärdet $\bar{X}$ och stickprovsvariansen s_n^2 är oberoende, där

$$\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{och} \quad s_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2. \text{ (5p)}$$

Problem 3. Låt (X, Y) vara likformigt fördelad på övre halvan av enhetscirkeln, dvs regionen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

(a) Bestäm det betingade väntevärdet av X givet $Y = y$ för $y \in [0, 1]$. (4p)

(b) Bestäm kovariansen mellan X och Y. (3p)

(c) Avgör huruvida X och Y är oberoende eller ej. (3p)

Problem 4. Avgör vilka två av följande funktioner,

$$\psi_1(t) = 1 - e^t, \quad \psi_2(t) = (1 + e^t)/2, \quad \psi_3(t) = e^{-t^2/2}, \quad \psi_4(t) = e^{t^2/4},$$

som inte är momentgenererande funktion för någon stokastisk variabel, och motivera ditt svar. För de funktioner som är momentgenererande funktion för någon stokastisk variabel, beräkna variabelns väntevärde och varians. (10p)

Problem 5. Låt $(X, Y)'$ vara multivariat normalfördelad med väntevärdesvektor μ och kovariansmatris Λ givet av

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Låt $Z := (Y - X)/\sqrt{3}$ och $U := X^2 + (Y - X)^2/3$.

(a) Bestäm fördelningen av $(X, Z)'$. (3p)

(b) Beräkna väntevärdet $\mathbb{E}[UXZ]$. (3p)

(c) Visa att U är χ^2-fördelad genom att beräkna dess momentgenererande funktion, samt bestäm antalet frihetsgrader. (4p)

Problem 6. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende exponentialfördelade variabler med väntevärde 1. Låt $a > 0$ vara en konstant och låt N_n ange antalet variabler utav de n första vars värde överstiger $a \ln(n)$, dvs

$$N_n := \#\{k \leq n : X_k > a \ln(n)\},$$

där $\ln(x)$ står för den naturliga logaritmen.

(a) Beräkna väntevärdet av N_n och bestäm för vilka värden på $a > 0$ som gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[N_n]$ är ändligt. (3p)

(b) Låt $a > 1$. Visa att $N_n \xrightarrow{p} 0$ då $n \to \infty$. (3p)

(c) Låt $a < 1$. Visa att $\mathbb{P}(N_n \geq 1) \to 1$ då $n \to \infty$. (4p)