1 ⓐ En följd $(X_n)_{n\geq 1}$ av stokastiska variabler sägs konvergera i sannolikhet mot en stokastisk variabel X om $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$ 2p

ⓑ Låt $(X_n)_{n\geq 1}$ vara en följd av iid variabler med ändligt väntevärde μ. Då gäller

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu \quad \text{då } n \to \infty.$$ 3p

ⓒ Då g är kontinuerlig i punkten a så existerar för varje $\varepsilon > 0$ ett $\delta > 0$ så att

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$ 2p

Då $X_n \xrightarrow{P} a$ så följer det, för var $\varepsilon > 0$, att

$$\mathbb{P}(|g(X_n) - g(a)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - a| \geq \delta)$$ 3p

går mot noll då $n \to \infty$. Alltså gäller $g(X_n) \xrightarrow{P} g(a)$.

2 ⓐ Antag att $X \sim N(0, I)$. Eftersom I är inverterbar/positivt definit så har X en täthet som ges av 1p

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{\det(I)}} \exp\left(-\frac{1}{2} x' I^{-1} x\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$$ 2p

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_k^2\right).$$

Tätheten är alltså produkten av de n marginaltätheterna, vilket är ekvivalent med att komponenterna av X är oberoende. 2p

(b) Låt $X \sim N(0, I)$ och sätt $Y = BX$ där

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

1p

Notera att B är en $(n+1)\times n$-matris och att

$$\bar{X} = Y_1 \quad \text{och} \quad s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n+1} Y_k^2 .$$

1p

Enligt sats är fördelningen för $Y \sim N(0, BB')$. Vi får

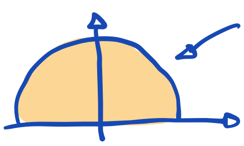
$$\operatorname{Cov}(Y) = BB' = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & ?? & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}.$$

1p

Detta betyder att Y_1 är oberoende av $(Y_2, Y_3, \dots, Y_{n+1})'$, vilket kan visas på liknande sätt som (a) ovan. Eftersom $\bar{X} = Y_1$ och s_n^2 är en funktion av $(Y_2, \dots, Y_{n+1})'$, så följer det att dessa är oberoende.

2p

$\boxed{3}$ (a)



(X,Y) likformigt fördelad.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{om } x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

1p

Den betingade fördelningen för X givet $Y=y$ är den med täthet $(y \in [0,1])$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{\pi f_Y(y)}$$

1p

för $|x| \le \sqrt{1-y^2}$. Tätheten är konstant, vilket motsvarar en likformig fördelning. Eftersom tätheten är symmetrisk får vi

$$E[X \mid Y=y] = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\, f_{X|Y=y}(x)\,dx = 0.$$

2p

(b) Vi beräknar

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

Betingning på Y ger enl. sats

$$\mathbb{E}[X] \overset{\text{sats}}{=} \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[X\mid Y]\,] \overset{(a)}{=} 0,$$

$$\mathbb{E}[XY] \overset{\text{sats}}{=} \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[XY\mid Y]\,] \overset{\text{sats}}{=} \mathbb{E}[\,Y\,\mathbb{E}[X\mid Y]\,] \overset{(a)}{=} 0.$$ 2p

Därmed gäller $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$. 1p

(c) Vi såg i (a) att $\mathbb{E}[X\mid Y=y]$ ej beror på y, men att den betingade fördelningen av X givet $Y=y$ beror på y.
(Den betingade fördelningen är likformig på $[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]$.)
Därmed kan variablerna ej vara oberoende. 3p

4 MGF av en stokastisk variabel X definieras

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$$ 2p

för $t \in \mathbb{R}$ så att väntevärdet är ändligt.

Speciellt gäller det att $\varphi_X(t) \geq 0 \ \ \forall\, t$. Notera att φ_1 kan anta negativa värden, och därmed ej är MGF för någon variabel. (Dessutom gäller $\varphi_1(0) = 0 \neq 1 = \varphi_X(0)$.) 2p

Dessutom gäller det att

$$\varphi_X'(0) = \mathbb{E}[X] \quad \text{och} \quad \varphi_X''(t) = \mathbb{E}[X^2],$$

och därmed att

$$\mathrm{Var}(X) = \varphi_X''(0) - (\varphi_X'(0))^2.$$ 2p

För φ_3 gäller

$$\left.\begin{aligned} \varphi_3'(t) &= -t e^{-t^2/2} \\ \varphi_3''(t) &= -e^{-t^2/2} + t^2 e^{-t^2/2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_3''(0) - \varphi_3'(0)^2 = -1 < 0.$$

Därmed kan φ_3 ej vara MGF. 2p

Vi noterar att ψ_2 är MGF av en Bern(1/2)-fördelning och ψ_4 MGF för $N(0, 1/2)$.

Väntevärde och varians för fördelningarna som bestäms av ψ_2 och ψ_4 fås även via derivering.

$$\psi_2'(0) = \frac{1}{2} \qquad \psi_2''(0) - \psi_2'(0)^2 = \frac{1}{4}$$
$$\psi_4'(0) = 0 \qquad \psi_4''(0) - \psi_4'(0)^2 = 1/2.$$
2p

$\boxed{5}$ (a) Vi har

$$\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = \overset{=:B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$
1p

Enligt sats är $(X, Z)' \sim N(0, B\Lambda B')$, där 1p

$$B\Lambda B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
1p

Alltså är $(X, Z)' \sim N(0, I)$.

(b) Notera att $U = X^2 + Z^2$. Från sats vet vi att X och Z är oberoende då de är okorrelerade. Alltså får vi 1p

$$E[UXZ] \overset{U}{=} E[X^3 Z + X Z^3]$$
$$\overset{\text{oberoende}}{=} E[X^3]E[Z] + E[X]E[Z^3]$$
$$= 0,$$
2p

ty X och Z har väntevärde noll.

(c) Eftersom X och Z är oberoende så får vi

$$\psi_U(t) = \psi_{X^2}(t) \cdot \psi_{Z^2}(t).$$
1p

Eftersom både X och Z är $N(0,1)$ är dess MGF lika.

$$\psi_{X^2}(t) = E[e^{tX^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{e^{tx^2} e^{-x^2/2}}_{e^{-x^2(1-2t)/2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1-2t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2(1-2t)/2} dx}_{=1}$$

ty täthet av $N(0, \frac{1}{1-2t})$

Därmed får vi

$$\psi_{X^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \qquad t < \frac{1}{2},$$ 2p

samt

$$\psi_U(t) = \frac{1}{1-2t} \qquad t < 1/2,$$

vilket är MGF för χ^2-fördelning med två frihetsgrader. 1p

$\boxed{6}$ (a) Vi har att

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_n] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\{X_k > a\ln(n)\}\Big] \\
&= n \cdot \mathbb{P}(X_n > a \cdot \ln(n)) \\
&= n \cdot \int_{a\cdot\ln(n)}^{\infty} e^{-x}\,dx \\
&= n \cdot e^{-a\cdot\ln(n)} \\
&= n \cdot n^{-a} \\
&= n^{1-a}.
\end{aligned}$$ 2p

Speciellt gäller

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[N_n] = \begin{cases} 0 & \text{om } a > 1 \\ 1 & \text{om } a = 1 \\ \infty & \text{om } a < 1 \end{cases}$$ 1p

(b) För $a > 1$ gäller $\mathbb{E}[N_n] \to 0$ då $n \to \infty$. Vi vill visa att, för $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|N_n| > \varepsilon) \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$ 1p

Eftersom $N_n \geq 0$ ger Markovs olikhet att

$$\mathbb{P}(|N_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(N_n \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[N_n]}{\varepsilon} \to 0$$

då $n \to \infty$. 2p

(c) Låt nu $a<1$. Då $X_1, X_2, \ldots$ iid får vi

$$\mathbb{P}(N_n=0) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \le a\cdot \ln(n)\}\Big)$$

$$\overset{\text{iid}}{=} \mathbb{P}(X_1 \le a\cdot \ln(n))^n \qquad 2p$$

$$\overset{\text{beräkning i (a)}}{=} \left(1-\frac{1}{n^a}\right)^n$$

$$= \underbrace{\left(1-\frac{1}{n^a}\right)^{n^a}}_{\to e^{-1}<1} \cdot {}^{\underbrace{n^{1-a}}_{\to\infty \text{ då } a<1}}$$

Vi drar slutsatsen att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(N_n=0) = 0. \qquad 2p$$