STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
MM2002 Matematik för naturvetenskaper I
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
2022-08-10

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

---

1. **(2+3 p.)** Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-7x+12}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{1-\cos x}.$$

Lösning: Polynomen i täljare och nämnare har båda 3 som nollställe, därför kan de faktoriseras, t.ex. genom polynomdivision. Vi får

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-7x+12} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-4)} = \frac{x+1}{x-4}$$

för $x \neq 3$, och därför

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-7x+12} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-4} = -4.$$

Det andra gränsvärdet kan bestämmas på följande sätt:

$$\frac{e^{x^3}-1}{1-\cos x} = \frac{\frac{e^{x^3}-1}{x^3}}{\frac{1-\cos x}{x^3}},$$

och gränsvärden av täljaren och nämnaren kan beräknas separat. Med substitionen $t = x^3$ har vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x^3} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1.$$

Dessutom, med Taylorutveckling kring $x_0 = 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}+B(x)x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{1}{2}+B(x)x^2} = 0,$$

där B är en funktion som är begränsad nära $x = 0$. Därför får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{1-\cos x} = 1 \cdot 0 = 0.$$

2. **(5 p.)** För varje reellt tal a, bestäm antalet lösningar till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} (4-a)x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ 2x_1 + (1-a)x_2 - 2x_3 &= 2, \\ -x_1 + 2x_2 + (4-a)x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Lösning: Ekvationssystemet kan skrivas som $A\vec{x} = \vec{b}$ med

$$A = \begin{pmatrix} 4-a & 2 & -1 \\ 2 & 1-a & -2 \\ -1 & 2 & 4-a \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi testar med determinanten:

$$\det A = (4-a)^2(1-a) + 4 - 4 - (1-a) + 4(4-a) - 4(4-a) = \big((4-a)^2 - 1\big)(1-a)$$

blir noll om och endast om $a = 1$ eller $(4-a)^2 = 1$, och den sista ekvationen är ekvivalent med

$$4 - a = \pm 1,$$

alltså $a = 3$ eller $a = 5$. Därmed vet vi redan att systemet har precis en lösning om $a \neq 1, 3, 5$.

Vi undersöker de övriga tre fallen separat:

$a = 1$: Då är ekvationssystemet på formen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 8/3 & 8/3 & 4/3 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 12/3 \end{array}\right).$$

Detta är en motsägelse, alltså har systemet inga lösningar för $a = 1$.

$a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Igen en motsägelse, inga lösningar för $a = 3$.

$a = 5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vi har två pivotelement men tre variabler. Alltså finns det oändligt många lösningar för $a = 5$.

3. **(2+2+1 p.)** Låt $f(x) = (x^4 - x^2 - 1)e^{-x^2}$.

   (a) Finn alla lokala minimi- och maximipunkter till f.

   (b) Undersök funktionens beteende när $x \to \pm\infty$.

   (c) Skissa grafen av f.

Lösning: (a) Funktionen är definierad och deriverbar på hela reella axeln. Som derivator har vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3 - 2x)e^{-x^2} - (x^4 - x^2 - 1)(2x)e^{-x^2} = (-2x^5 + 6x^3)e^{-x^2}, \\ f''(x) &= 2x^2(2x^4 - 11x^2 + 9)e^{-x^2}. \end{aligned}$$

De enda kandidater för min- och maxpunkter är alltså förstaderivatans nollställen, dvs. lösningarna till

$$0 = f'(x) = x^3(-2x^2 + 6)e^{-x^2},$$

alltså $x = 0$ samt $x = \pm\sqrt{3}$. Genom andraderivatan ser vi

$$f''(0) = 0, \qquad f''(\pm\sqrt{3}) = -18e^{-3} < 0.$$

Därför har f ett lokalt maximum i $x = \pm\sqrt{3}$. Förstaderivatan blir negativ för $x < 0$ nära $x = 0$ och positiv för $x > 0$ nära $x = 0$, alltså har f i $x = 0$ ett loktalt minimum.

(b) När $x \to +\infty$ så är för alla tillräckligt stora x

$$0 < f(x) = \frac{x^4 - x^2 - 1}{e^{x^2}} < \frac{x^4}{e^{x^2}} \to 0$$

(standardgränsvärde / exponentialfunktionen växer snabbare än varje polynom), alltså

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

På grund av funktionens symmetri blir det samma gränsvärde när $x \to -\infty$.

4. **(6 p.)** Bestäm minimum och maximum av funktionen

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

på triangeln i planet med hörnen $(1, 0)$, $(1, 1)$ och $(0, 1)$.

Lösning: Vi hittar stationära punkter genom att hitta gemensamma nollställen av

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2+y^2} 2x \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x^2+y^2} 2y.$$

Ekvationen $e^{x^2+y^2}2x = 0$ ger $x = 0$ och då blir den andra ekvationen $e^{y^2}2y = 0$, vilket ger $y = 0$. Således är $(0, 0)$ den enda kritiska punkten, men den ligger inte i triangeln. Därför måste båda minimum och maximum ligga på randen.

Randen består av tre delar. Den första sidan beskrivs genom $y = 1$ och $0 \le x \le 1$. Där har funktionen formen $g(x) = f(x, 1) = e^{x^2+1}$. Denna funktion är växande för $0 \le x \le 1$, vilket innebär att den antar sitt minsta och största värde på randpunkterna, d.v.s. för

$x = 0$ och $x = 1$ (alltså på hörnen). Detta ger de två punkterna $(0, 1)$ och $(1, 1)$ som eventuella extrempunkter.

Samma argumentationen för sidan med $x = 1$ och $0 \le y \le 1$ ger de möjliga extrempunkterna $(1, 0)$ och (igen) $(1, 1)$.

Sidan som inte är parallell till någon axel beskrivs genom $0 \le x \le 1$ och $y = 1 - x$. Funktionen f har där formen

$$g(x) = e^{x^2+(1-x)^2} = e^{2x^2-2x+1}.$$

Denna funktion är inte monoton för $0 \le x \le 1$. Därför deriverar vi g för att hitta möjliga minimi- och maximipunkter. Vi har

$$g'(x) = (4x - 2)e^{2x^2-2x+1},$$

vilket är noll om $4x - 2 = 0$, d.v.s. om $x = 1/2$. Då är $y = 1 - 1/2 = 1/2$ och vi har en till möjlig extrempunkt.

Vi beräknar nu funktionsvärdena,

$$\begin{aligned} f(1, 0) &= e, \\ f(0, 1) &= e, \\ f(1, 1) &= e^2, \\ f(1/2, 1/2) &= e^{1/2} = \sqrt{e}. \end{aligned}$$

Största av värdena är e^2 och minsta värdet är $\sqrt{e}$. Därför är e^2 maximum och $\sqrt{e}$ minimum av f på triangeln.

5. **(3+1 p.)** I en regelbunden sexhörning betecknas hörnen A, B, C, D, E, F (i ordning moturs). Vektorerna $e_1 = \overline{AB}$ och $e_2 = \overline{AF}$ utgör tillsammans en bas i planet, och detsamma gäller för vektorerna $f_1 = \overline{AC}$ och $f_2 = \overline{AE}$.

   (a) Uttryck vektorerna f_1, f_2 i basen e_1, e_2.

   (b) Om vektorn u har koordinater $(1, -3)$ i basen f_1, f_2, vilka koordinater har då u i basen e_1, e_2?

Lösning: (a) Ritar man sexhörningen och betecknar dess mittpunkt med M och observerar att $\overline{FM} = \overline{MC} = \overline{AB}$ på grund av symmetri, så är

$$f_1 = \overline{AF} + \overline{FM} + \overline{MC} = \overline{AF} + 2\overline{AB} = e_2 + 2e_1.$$

Därför har vi

$$f_2 = f_1 + \overline{CD} + \overline{DE} = e_2 + 2e_1 + e_2 - e_1 = e_1 + 2e_2.$$

(b) Att u har koordinater $(1, -3)$ i basen f_1, f_2 betyder att

$$u = f_1 - 3f_2 = e_2 + 2e_1 - 3e_1 - 6e_2 = -e_1 - 5e_2.$$

Därför är dess koordinater i basen e_1, e_2 lika med $(-1, -5)$.

6. **(2+3 p.)**

   (a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' - 5y' + 6y = 0$.

   (b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = e^x(y+1)$ som uppfyller $y(0) = 0$.

Lösning: (a) Den karakteristiska ekvationen är $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Den kan lösas med pq-formeln,

$$\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \begin{cases} 2, \\ 3. \end{cases}$$

Alltså ges den allmänna lösningen till denna DE av

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x},$$

där $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ är godtyckliga konstanter.

(b) Denna DE är separabel och därför ekvivalent med

$$\int \frac{1}{y+1} \mathrm{d}y = \int e^x \mathrm{d}x.$$

Beräkning av integralerna ger

$$\log|1+y| = e^x + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Redan nu kan vi bestämma konstanten C ty $y(0) = 0$ ger

$$C = -1. \tag{2}$$

Från detta och (1) får vi

$$|1+y| = e^{e^x - 1}.$$

Om vi antar att $1 + y$ är positiv (vilket i alla fall stämmer lokalt kring $x = 0$ på grund av begynnelsevärdet), så får vi

$$y(x) = e^{e^x - 1} - 1,$$

och man kan dubbelkolla att denna funktion verkligen löser begynnelsevärdeproblemet.

Tentamensåterlämning annonseras på kurshemsidan.