STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
19 augusti 2022

Lösningar

19 augusti 2022

Uppgift 1

Rätt svar är

a) 1. $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ om $A_1, A_2, \ldots$ är parvis disjunkta.

b) 1. $f(x) = x$ om $x \in [0, \sqrt{2}]$, och $f(x) = 0$ annars.

c) 2. X är hypergeometriskt fördelad med väntevärde 10.

d) 1. $\mathbb{P}(X \leq 0.5) = 1 - \Phi(0.5)$

e) 4. Man kan inte dra några slutsatser om $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Uppgift 2

Låt V, G och S beteckna händelserna att båda strumporna är vita, gråa respektive svarta. Dessa händelser är disjunkta

a) $\mathbb{P}(V \cup G \cup S) = \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(S) = \frac{\binom{8}{2}+\binom{12}{2}+\binom{28}{2}}{\binom{48}{2}} = 0.4184.$

b) $\mathbb{P}(V | V \cup G \cup S) = \frac{\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(V \cup G \cup S)} = \frac{\binom{8}{2}/\binom{48}{2}}{0.4184} = 0.0593.$

Uppgift 3

a) Det måste gälla att $\sum_{i,j} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1$, dvs $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = c + 2c = 1$, vilket ger $c = 1/3$.

b) Vi har att X och Y är lika fördelade, med $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 1/3$ och $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(Y = 2) = 2/3$.

c) Variablerna X och Y kan inte vara oberoende, eftersom vi ser ur den simultana sannolikhetsfunktionen att $X = Y$. Formellt kan vi konstatera att $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/3 \neq (1/3)^2 = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$.

Uppgift 4

Täthetsfunktionen för X ges av $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ för $x \geq 0$ (och $F_X(x) = 0$ för $x < 0$) och fördelningsfunktionen blir $F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$ för $x \geq 0$ (och $F_X(x) = 0$ för $x < 0$).

a) Fördelningsfunktionen för $Z = 2X$ ges av

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z/2) = F_X(z/2) = 1 - e^{-\lambda z/2}, \quad z \geq 0.$$

Täthetsfunktionen får vi genom att derivera fördelningsfunktionen:

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda z/2}, \quad z \geq 0.$$

Alltså är Z exponentialfördelad med parameter $\lambda/2$.

b) Låt nu $Z = X + Y$. Enligt faltningsformeln gäller för $z \geq 0$ att

$$f_Z(z) = \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx = \lambda^2 \int_0^z dx = \lambda^2 e^{-\lambda z}, \quad z \geq 0.$$

Uppgift 5

Låt X_i beteckna antalet bilar för hushåll i ($i = 1, \ldots, 1000$). Då gäller att $\mathbb{E}[X_i] = 0.9$ och $\mathrm{Var}(X_i) = 0.29$. Det totala antalet bilar ges av $S = \sum_{i=1}^{1000} X_i$, och vi har att $\mathbb{E}[S] = 1000 \ldots \mathbb{E}[X_i] = 900$ och $\mathrm{Var}(S) = 1000 \cdot \mathrm{Var}(X_i) = 290$ (eftersom antalet bilar i olika hushåll är oberoende). Enligt Centrala gränsvärdessatsen är S approximativt normalfördelad, eftersom det är en summa av många oberoende lika fördelade stokastiska variabler. Vi vill bestämma n så att $\mathbb{P}(S \leq n) = 0.99$ och noterar att

$$\mathbb{P}(S \leq n) = \mathbb{P}\left(\frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} \leq \frac{n - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} \right) \approx \Phi\left(\frac{n - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} \right),$$

där Φ betecknar fördelningsfunktionen för N(0,1)-fördelningen. Ska denna sannolikhet vara 0.99 måste $(n - \mathbb{E}[S])/\sqrt{\mathrm{Var}(S)}$ ges av 0.01-kvantilen i

N(0,1)-fördelningen, dvs

$$\frac{n - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} = 2.33 \Leftrightarrow n \approx 900 + 2.33 \cdot 17.03 \approx 939.7.$$

Man måste alltså bygga 940 P-platser.

Uppgift 6

Enligt felfortplantningsformlerna gäller att om X är en stokastisk variabel med väntevärde $\mathbb{E}[X] = \mu$ och standardavvikelse $\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sigma$, så har den stokastiska variabeln $g(X)$ väntevärde $\mathbb{E}[g(X)] \approx g(\mu)$ och standardavvikelse $\sqrt{\mathrm{Var}(X)} \approx |g'(\mu)|\sigma$. Här är $T = 3/V$, där V är en stokastisk variabel som betecknar bilens hastighet, med $\mathbb{E}[V] = 100$ och $\sqrt{\mathrm{Var}(V)} = 5$ km/h. Vi får

$$E[T] = 3E\left[\frac{1}{V}\right] \approx 3 \cdot \frac{1}{\mathbb{E}[V]} = \frac{3}{100} = 0.03\mathrm{h} = 1\mathrm{min}48\mathrm{s}.$$

och

$$\sqrt{\mathrm{Var}(T)} = 3\sqrt{\mathrm{Var}\left(\frac{1}{V}\right)} \approx \left|-\frac{1}{\mathbb{E}[V]^2}\right| \sqrt{\mathrm{Var}(V)} = \frac{15}{1000} = 0.0015\mathrm{h} = 5.4\mathrm{s}.$$