Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Analys, Matematik I, den 15 augusti 2022

1. (a) Förlänger vi med både tälarens och nämarens konjugat och efter det förkortar med n får vi
$$\frac{\sqrt{n^2+3}-n}{\sqrt{n^2-1}-n} = \frac{((n^2+3)-n^2)}{((n^2-1)-n^2)}\,\frac{\sqrt{n^2-1}+n}{\sqrt{n^2+3}+n} = -3\frac{\sqrt{1-1/n^2}+1}{\sqrt{1+3/n^2}+1} \to -3$$
då $n \to \infty$.

   (b) Med standardutvecklingarna $e^t = 1+t+t^2/2!+O(t^3)$ och $\arctan(t) = t - t^3/3 + O(t^5)$ då $t \to 0$ får vi
$$\frac{e^{x^2}-\arctan^2(x)-1}{x^4} = \frac{(1+x^2+x^4/2+O(x^6)) + \left(x-x^3/3+O(x^5)\right)^2 - 1}{x^4}$$
$$= \frac{1+x^2+x^4/2+O(x^6)-(x^2-2x^4/3+O(x^5))-1}{x^4}$$
$$= \frac{7x^4/6+O(x^5)}{x^4} = \frac{7}{6}+O(x) \to \frac{7}{6}, \qquad \text{då } x \to 0.$$

2. Funktionen $f(x) = \frac{x^2}{|x+1|}$ är definierad då $x \neq -1$, så $D_f = (-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$. Enda möjliga vertikala asymptoten är därmed $x=-1$, och vi får $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \infty$ så $x=-1$ är en asymptot.

   Vi får, efter polynomdivision, att $f(x) = \begin{cases} x-1+\frac{1}{x+1} & ; x > -1 \\ -x+1-\frac{1}{x+1} & ; x < -1 \end{cases}$ vilket direkt ger att $y = x-1$ en sned asymptot då $x \to \infty$, och $y=-x+1$ en sned asymptot då $x \to -\infty$.

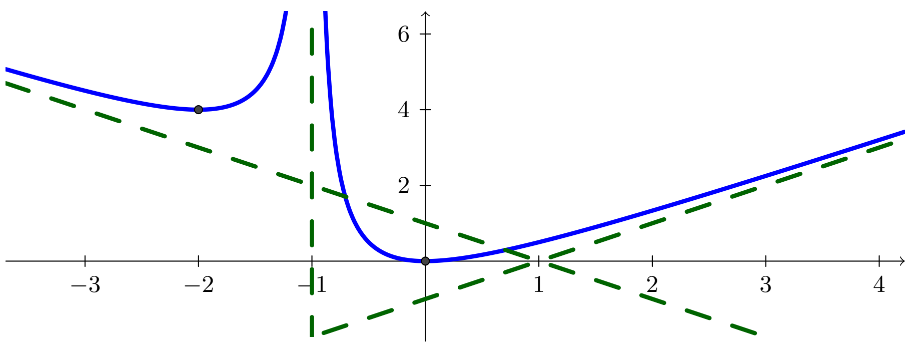
   Vi får att $f'(x) = \begin{cases} 1-\frac{1}{(x+1)^2} & ; x > -1 \\ -1+\frac{1}{(x+1)^2} & ; x < -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} & ; x > -1 \\ -\frac{x(x+2)}{(x+1)^2} & ; x < -1 \end{cases}$ vilket ger att $f'(x) = 0$ för $x=0$ och för $x=-2$. Vi gör en teckentabell

x		-2		-1		0	
$f'(x)$	-	0		$\wr$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\wr$	$\searrow$	0	$\nearrow$

   Från teckentabellen ser vi att funktionen har två lokala extrempunkter, ett lokalt minimum för $x=-2$, och ett globalt minimum för $x=0$.

   Vi får att $f''(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^3} & ; x > -1 \\ -\frac{2}{(x+1)^3} & ; x < -1 \end{cases} = \frac{2}{|x+1|^3}$ så $f''(x) > 0$ för alla $x \in D_f$, så grafen är konvex på vardera av de två intervallen $(-\infty,-1)$ och $(-1,\infty)$.

   Vi skissar grafen:



3. I polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ motsvaras området D av området $E = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq \sqrt{3},\ \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2\}$ i $r\theta$-planet. Vi får

$$\iint_D \frac{x^3y}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_E \frac{(r\cos(\theta))^3 r\sin(\theta)}{r^2} r\,drd\theta = \iint_E r^3\cos^3(\theta)\sin(\theta)\,drd\theta$$
$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^3(\theta)\sin(\theta)\,d\theta \int_1^{\sqrt{3}} r^3\,dr = \left[-\frac{\cos^4(\theta)}{4}\right]_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^{r=\sqrt{3}}$$
$$= \frac{(1/\sqrt{2})^4}{4} \cdot \frac{9-1}{4} = \frac{1}{8}.$$

4. (a) Området ges av
$$x^3 \leq y \leq \sqrt{x}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$
Om vi beräknar volymen som fås då den övre kurvan roterar kring x-axeln med skivformeln för rotationsvolym, och subtraherar volymen som genereras av den undre kurvan, får vi att volymen V_1 ges av
$$V_1 = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2\,dx - \pi\int_0^1 \left(x^3\right)^2\,dx = \pi\int_0^1 (x - x^6)\,dx = \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{5\pi}{14}$$

(b) Med formeln för cylindriska skal (rörformiga element) får vi
$$V_2 = 2\pi\int_0^1 x(\sqrt{x} - x^3)\,dx = 2\pi\int_0^1 (x^{3/2} - x^4)\,dx = 2\pi\left[\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{5}.$$

5. Funktionen är kontinuerlig på en kompakt mängd, samt partiellt deriverbar överallt, så enligt en känd sats finns globala maximum och minimum och dessa antas i inre stationära punkter eller på randen.

Vi börjar med att bestämma de stationära punkterna. Vi får
$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = xy(2y + 3x - 8), \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2(2y + x - 4). \end{cases}$$

I det inre av området är $x, y \neq 0$, så vi får att $2y + 3x - 8 = 2y + x - 4 = 0$, med den enda lösningen $(x, y) = (2, 1)$. Denna punkt är en inre punkt i området, och därmed en kandidat.

Området är en triangel, och vi undersöker nu om det finns stationära punkter när funktionen restingeras till de tre linjestycken randen består av.

Längs kanterna $x = 0$ respektive $y = 0$ är funktionen konstant 0.

Vi parametriserar den tredje sidan genom $\begin{cases} x = t \\ y = 6 - t \end{cases}$ för $0 < t < 6$. Sätter vi in detta i funktionen $f(x,y) = (y + x - 4)x^2y$ får vi $h(t) = f(t, 6-t) = 2t^2(6-t)$. Detta ger att $h'(t) = 6t(4-t)$, så i intervallet fås $h'(t) = 0$ endast om $t = 4$, så vi får kantidatpunkten $(4, 2)$.

Vi observerar att hörnpunkterna redan är undersökta (funktionen var 0 där).

Vi jämför funktionsvärdena i kandidatpunkterna:

(x,y)	$xy=0$	$(2,1)$	$(4,2)$
$f(x,y)$	0	-4	64

så minsta värdet är $f(2,1)=-4$ och det största $f(4,2)=64$.

6. (a) Differentialekvationen är separabel. Om vi skriver om den som $\frac{y'}{y^2}=\frac{\ln(x)}{x}$ och integrerar båda sidor får vi att $-\frac{1}{y}=\frac{\ln(x))^2}{2}+C$. Utnyttjar vi begynnelsevillkoret $y(1)=1$ får vi $C=-1$, vilket ger att $y(x)=\dfrac{2}{2-(\ln(x))^2}$.

   (b) Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen $y_h''-2y_h'+y_h=0$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2-2r+1=0$, som har dubbelroten $r=1$, så $y_h=(Ax+B)e^x$, för $A,B\in\mathbb{R}$.
   Vi ansätter en partikulärlösning på formen $y_p=Cx+D$, så $y_p'=C$ och $y_p''=0$ så vi får $y_p''-2y_p'+y_p=Cx+(D-2C)$ vilket skall vara lika med x, vilket betyder att $C=1$ och $D=2$, så $y_p=x+2$.
   Den allmänna lösningen till differentialekvationen är därmed

$$y=y_p+y_h=x+2+(Ax+B)e^x.$$

   Detta ger $y'=1+(Ax+A+B)e^x$, så begynnelsevillkoren blir $y(0)=2+B=0$ och $y'(0)=1+A+B=0$, så $A=1$ och $B=-2$. Svaret är således att $y(x)=x+2+(x-2)e^x$.