OBS! Det ursprungliga lösningsförslaget innehöll skrivfel i lösningarna till uppgifterna 2(c) och 4(b), som i efterhand uppmärksammats av studenter. Detta är en reviderad version där dessa fel är åtgärdade.

Senast reviderad: 25 oktober 2022

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sven Raum

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
Maj 3, 2022

15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

1. (a) **(1 poäng)** Definera begreppet "linjär avbildning".

   (b) **(1 poäng)** För ett naturligt tal $n \geq 1$ betrakta avbildningen $\mathrm{Tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ som uppfyller $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$. Låt $k \geq 1$ vara ett annat naturligt tal och $B \in \mathrm{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ en matris. Kontrollera att avbildningen från $\mathrm{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ till $\mathbb{R}$ som defineras genom formeln $A \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ är linjär.

   (c) **(3 poäng)** Låt $T : \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vara den linjära avbildningen som uppfyller

$$T(A) = \mathrm{Tr}(AB)\,,$$

där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm $\mathrm{N}(T)$ och $\mathrm{R}(T)$ och hitta en bas till $\mathrm{N}(T)$.

Lösning.

(a) Se bok eller föreläsningsanteckningar.

(b) Då matrismultiplikation är distributiv, behöver vi bara visa att Tr är linjär. Detta kan ses genom följande räkning för $A_1, A_2 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ och $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A_1 + cA_2) &= \sum_{i=1}^n ((A_1)_{ii} + (cA_2)_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^n (A_1)_{ii} + c\sum_{i=1}^n (A_2)_{ii} \\ &= \mathrm{Tr}(A_1) + c\mathrm{Tr}(A_2)\,. \end{aligned}$$

(c) Vi kan direkt se att $\mathrm{R}(T) = \mathbb{R}$ för att det är ett delrum av $\mathbb{R}$ och

$$T(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \mathrm{Tr}(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}) = \mathrm{Tr}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1 \neq 0\,.$$

För en allmän matris $A \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ beräknar vi

$$T(A) = \mathrm{Tr}(\begin{pmatrix} A_{11} + A_{13} & A_{12} - A_{13} \\ A_{21} + A_{23} & A_{22} - A_{23} \end{pmatrix}) = A_{11} + A_{13} + A_{22} - A_{23}\,.$$

Alltså gäller

$$\mathrm{N}(T) = \{A \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \mid A_{11} + A_{13} + A_{22} - A_{23} = 0\}\,.$$

Då $\dim \mathrm{N}(T) = \dim \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{R}(T) = 5$, är det tillräcklig att hitta 5 linjärt oberoende vektorer i $\mathrm{N}(T)$ för att bestämmer en bas. De vektorer

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

är element av $\mathrm{N}(T)$ och dem är linjärt oberoende för att de genererar $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ tillsammans med vektorn

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) **(1 poäng)** Definiera koordinater av en vektor relativ till en ordnad bas.
   (b) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”basbytesmatris”.
   (c) **(3 poäng)** Betrakta vektorrummet $\mathrm{P}_2(\mathbb{C})$ med följande familjer av vektorer:

$$\beta = (1 + x, x + 2x^2, 1 + x + x^2) \text{ och}$$
$$\gamma = (x + x^2, 1 + x + x^2, 1 - x^2)\,.$$

   Visa att β och γ är baser för $\mathrm{P}_2(\mathbb{C})$ och beräkna basbytesmatris från β till γ.

Lösning.

(a) Se bok eller föreläsningsanteckningar.

(b) Se bok eller föreläsningsanteckningar.

(c) Låt $\epsilon = (1, x, x^2)$ vara standard ordnad basen av $\mathrm{P}_2(\mathbb{C})$. Vi skriver koordinatvektorer relativ till ϵ för vektorerna i β som koloner av en matris och beräkna dess determinant för att visa att β är en ordnad bas. Med

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

får vi

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 + 2 = 1\,.$$

Alltså är β en ordnad bas. Vi verifierar på samma sätt att γ är en ordnad bas. Matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

har determinanten

$$\det C = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1\,.$$

Vi observera att B och C är basbytematriser:

$$B = [\mathrm{id}]_\beta^\epsilon \qquad \text{och} \qquad C = [\mathrm{id}]_\gamma^\epsilon\,.$$

Efter beräkning av inverset av C, kan basbytesmatris från β till γ alltså beräknas som

$$[\mathrm{id}]_\beta^\gamma = [\mathrm{id}]_\epsilon^\gamma [\mathrm{id}]_\beta^\epsilon = C^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) **(1 poäng)** Låt $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vara ett inre-produktrum. Definiera normen på V som associeras med inre produkten.

   (b) **(4 poäng)** Betrakta punkterna

$$
\begin{aligned}
t_0 &= -1 & \qquad y_0 &= 2 \\
t_1 &= 0 & \qquad y_1 &= 0 \\
t_2 &= 1 & \qquad y_2 &= 1\,.
\end{aligned}
$$

Bestäm en minsta kvadratlösning till problemet att finna ett andragradspolynom $y = c_2 t^2 + c_1 t + c_0$ som går genom dessa punkter.

Lösning.

(a) Se bok eller föreläsningsanteckningar.

(b) För att hitta minsta kvadratlösning skriver vi

$$
A = \begin{pmatrix} t_0^2 & t_0 & 1 \\ t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

och hitta minsta kvadratapproximation till problemet

$$
A \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = b\,.
$$

Då detta system har en exakt lösning kan man hitta den och argumenterar att det måste vara bästa approximationen eftersom kvadratiska felet är nol. Annars kan man följa standard metoden för att hitta minsta kvadratapproximation vilket kräver lite mer räkning. Vi ska redovisa denna metod.

Vi beräknar alltså

$$
\begin{aligned}
A^*A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
A^*b &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vi hitta nu en minsta kvadratapproximation genom att lösa

$$
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

vilket ger koefficienter

$$
\begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

4. (a) **(2 poäng)** Formulera spektralsatsen.

   (b) **(3 poäng)** Betrakta delrummet

$$
W = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \,\middle|\, z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 = z_1 + i z_2 - z_3 - i z_4 \right\} \subseteq \mathbb{C}^4\,.
$$

Låt $P : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ vara den ortogonala projektionen på W. Hitta matrisrepresentationen av P relativ till standard ortonormalbasen av $\mathbb{C}^4$.

Lösning.

(a) Se bok eller föreläsningsanteckningar.

(b) Vi observera att vektorerna

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

är ortogonala och att

$$W = \{v_1, v_2\}^{\perp}$$

gäller. Vi kan alltså beräkna projektionen på W genom formeln

$$P(v) = v - \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \,.$$

Vi beräkna bilderna av standardbasvektorer och får

$$P(e_1) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \\ 0 \\ -1+i \end{pmatrix}$$

$$P(e_2) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \\ -1-i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P(e_3) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -1+i \\ 2 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

$$P(e_4) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1-i \\ 0 \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Denna vektorer är kolonerna av matrisrepresentation av P relativ till standard ordnad basen ϵ. Alltså gäller

$$[P]_\epsilon = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1+i & 0 & -1-i \\ -1-i & 2 & -1+i & 0 \\ 0 & -1-i & 2 & -1+i \\ -1+i & 0 & -1-i & 2 \end{pmatrix} .$$

5. (a) **(2 poäng)** Finn för vilka parametrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ matrisen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

är ortogonal.

(b) **(3 poäng)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösning.

(a) Matrisen är ortogonal om och endast om dess koloner bildar en ortonormalbas av $\mathbb{R}^2$. Allstå måste gäller att

$$1 = \beta^2 + (\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}})^2 = \beta^2 + \frac{1}{1+\beta^2}.$$

Detta är ekvivalent med

$$1 + \beta^2 = \beta^2 + \beta^4 + 1,$$

vilket visar att $\beta = 0$. Vi kan nu drar slutsatsen att $\gamma = 0$ och $\alpha \in \{-1, 1\}$ måste gäller. Enda parameter för vilka matrisen är ortogonal är alltså

$$\alpha = 1, \beta = 0 = \gamma \quad \text{och} \quad \alpha = -1, \beta = 0 = \gamma.$$

(b) Vi beräknar

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och hittar dess egenvärde $2, 2, 0$ med egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Singulärvärde för A är alltså $\sqrt{2} = \sigma_1 = \sigma_2$. Normalisering av egenvektorer ger

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu också beräkna vektorerna u_1, u_2 och kompletera den till en ortonormalbas av $\mathbb{R}^3$.

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi hittar alltså singulärvärdeuppdelning

$$A = U \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & 0 \end{pmatrix} V^{\mathrm{t}}$$

med

$$U = (u_1\, u_2\, u_3) \quad \text{och} \quad V = (v_1\, v_2\, v_3).$$

6. (a) **(5 poäng)** Formulera och bevisa Cauchy-Schwartz olikheten. Bevisa också att två vektorer v, w i ett inre-produktrum är linjärt beroende om $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ gäller.

Lösning.
Se bok eller föreläsningsanteckningar.