

OBS! Den ursprungliga tentamen innehöll ett skrivfel i Uppgift 5(b), där det stod "bilinjär" istället för "kvadratisk". Detta är en reviderad version där detta fel är åtgärdat.

Senast reviderad: 25 oktober 2022

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sven Raum

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
Augusti 18, 2022

15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

- (a) (**1 poäng**) Definera begreppen "nollrum" och "bildrum" av en linjär avbildning.
(b) (**1 poäng**) Låt $T : V \rightarrow W$ vara en linjär avbildning. Visa att nollrummet $N(T)$ är ett delrum av V .
(c) (**3 poäng**) Låt $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ vara den linjära avbildningen som uppfyller

$$T(A) = \left(A + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Visa att T är linjär, bestäm $R(T)$ och hitta en bas till $N(T)$.

- (a) (**1 poäng**) Definiera begreppet "egenvektor av en linjär avbildning".
(b) (**4 poäng**) Betrakta den linjära avbildningen $T : P_2(\mathbb{C}) \rightarrow P_2(\mathbb{C})$ som uppfyller $T(p) = (x+i)p'$. Hitta en bas av egenvektorer av T till $P_2(\mathbb{C})$.
3. (a) (**1 poäng**) Definiera begreppen "ortogonal bas" och "ortonormal bas" av ett inre-produktrum.
(b) (**4 poäng**) Betrakta $M_2(\mathbb{R})$ med inre produkten

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^t) = (AB^t)_{11} + (AB^t)_{22},$$

där B^t är transponatet av matrisen B . För $\alpha \in \mathbb{R}$ definiera den linjära avbildningen $T_\alpha : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ genom formeln

$$T_\alpha(A) = \alpha A + (1 - \alpha)A^t.$$

Bestäm för vilka $\alpha \in \mathbb{R}$ är avbildningen T_α diagonaliserbar relativ till en ortonormal bas av $M_2(\mathbb{R})$. Man får använda utan bevis att $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ och $\text{Tr}(A^t) = \text{Tr}(A)$ gäller för alla matriser $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

- (a) (**1 poäng**) Definiera begreppet "QR-uppdelning av en komplex matris".
(b) (**4 poäng**) Beräkna en QR-uppdelning för matrisen

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \sqrt{2}-2 \\ 1 & 1 & -2 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}.$$

5. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet "symmetrisk bilinjär form".
(b) **(4 poäng)** Beräkna rang och signaturen av den kvadratiska form $K : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller

$$K(v) = v_1v_3 - v_2v_4.$$

6. (a) **(2 poäng)** Låt $T : V \rightarrow W$ vara en bijektiv linjär avbildning och låt $T^{-1} : W \rightarrow V$ vara inversen, som uppfyller $T^{-1}(T(v)) = v$ för alla $v \in V$. Bevisa att T^{-1} är linjär.
(b) **(3 poäng)** Låt $U \in M_n(\mathbb{C})$ vara en komplex matris. Bevisa att U är unitär om och endast om kolonnerna av U utgör en ortonormal bas till \mathbb{C}^n .

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentanskrivning. Därefter kan en elektronisk kopia av tentan beställas från studentexpeditionen genom länken <https://survey.su.se/Survey/42570/sv>.