OBS! Den ursprungliga tentamen innehöll ett skrivfel i Uppgift 5(b), där det stod “bilinjär” istället för “kvadratisk”. Detta är en reviderad version där detta fel är åtgärdat.

Senast reviderad: 25 oktober 2022

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sven Raum

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
Augusti 18, 2022

1. (a) **(1 poäng)** Definera begreppen ”nollrum” och ”bildrum” av en linjär avbildning.

   (b) **(1 poäng)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning. Visa att nollrummet $\mathrm{N}(T)$ är ett delrum av V.

   (c) **(3 poäng)** Låt $T : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ vara den linjära avbildningen som uppfyller

$$T(A) = \left(A + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

   Visa att T är linjär, bestäm $\mathrm{R}(T)$ och hitta en bas till $\mathrm{N}(T)$.

Lösning

(a) Se bok eller förläsningsanteckningar.

(b) Om $v, w \in \mathrm{N}(T)$ och c är en skalär så gäller

$$T(cv + w) = cT(v) + T(w) = c0 + 0 = 0 .$$

Alltså gäller också $cv + w \in \mathrm{N}(T)$. Då $0 \in \mathrm{N}(T)$ kan vi dra slutsatsen att $\mathrm{N}(T)$ är ett delrum av V.

(c) Vi förenkla formeln som bestämmer T och hitta att

$$T(A) = A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + A_{21} & A_{12} + A_{22} \\ A_{11} + A_{21} & A_{12} + A_{22} \end{pmatrix} .$$

Då matrismultiplikation är distributiv ser vi att T är linjär. Bildrumet T kan beskrivas som

$$\mathrm{R}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\} .$$

Särskild gäller $\dim \mathrm{R}(T) = 2$, vilket medför att $\dim \mathrm{N}(T) = 4 - 2 = 2$. De två vektorerna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

är i nollrummet $\mathrm{N}(T)$ av T och linjär oberoende. Alltså är den en bas till $\mathrm{N}(T)$.

2. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”egenvektor av en linjär avbildning”.

   (b) **(4 poäng)** Betrakta den linjära avbildningen $\mathrm{T} : \mathrm{P}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{C})$ som uppfyller $\mathrm{T}(p) = (x + i)p'$. Hitta en bas av egenvektorer av T till $\mathrm{P}_2(\mathbb{C})$.

Lösning

(a) Se bok eller förläsningsanteckningar.

(b) Först beräknar vi matrisrepresentationen av T relativ till standard ordnad basen $\beta = (1, x, x^2)$ till $\mathrm{P}_2(\mathbb{C})$ och hitta

$$A = [T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Karaktäristiska polynomet av A är

$$\chi_A(t) = \det(A - t\mathrm{I}_3) = \det \begin{pmatrix} -t & i & 0 \\ 0 & 1-t & 2i \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = -t(1-t)(2-t).$$

Alltså är $0, 1, 2$ egenvärde av A och vi hitta deras egenrum genom beräkningen

$$\ker A = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - \mathrm{I}_3) = \operatorname{span} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \operatorname{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorarna är koordinater av en bas av egenvektorer till $\mathrm{P}_2(\mathbb{C})$. Vi kan alltså sammanfatta att

$$1, x + i, x^2 + 2ix - 1$$

är en bas ev egenvektorer av T till $\mathrm{P}_2(\mathbb{C})$.

3. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppen ”ortogonal bas” och ”ortonormal bas” av ett inre-produktrum.

   (b) **(4 poäng)** Betrakta $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ med inre produkten

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB^{\mathrm{t}}) = (AB^{\mathrm{t}})_{11} + (AB^{\mathrm{t}})_{22},$$

där B^{t} är transponatet av matrisen B. För $\alpha \in \mathbb{R}$ definiera den linjära avbildningen $T_\alpha : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ genom formeln

$$T_\alpha(A) = \alpha A + (1 - \alpha) A^{\mathrm{t}}.$$

Bestäm för vilka $\alpha \in \mathbb{R}$ är avbildingen T_α diagonaliserbar relativ till en ortonormal bas av $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Man får använda utan bevis att $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ och $\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{t}}) = \mathrm{Tr}(A)$ gäller för alla matriser $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Lösning

(a) Se bok eller förläsningsanteckningar.

(b) Vi kommer ihåg att en linjär avbilding på ett reell inre-produktrum är diagonaliserbar relativ till en ortonormal bas om och endast om det är självadjungerad. Enligt definitionen av adjungerad linjär avbildningen är T_α självadjungerad om och endast om

$$\langle T_\alpha(A), B \rangle = \langle A, T_\alpha(B) \rangle$$

gäller för all matriser $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Vi förenklar båda sidor och ser att

$$\langle T_\alpha(A), B \rangle = \mathrm{Tr}((\alpha A + (1-\alpha)A^{\mathrm{t}})B^{\mathrm{t}}) = \alpha \mathrm{Tr}(AB^{\mathrm{t}}) + (1-\alpha)\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}}) \quad \text{och}$$
$$\langle A, T_\alpha(B) \rangle = \mathrm{Tr}(A(\alpha B + (1-\alpha)B^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}) = \alpha \mathrm{Tr}(AB^{\mathrm{t}}) + (1-\alpha)\mathrm{Tr}(AB).$$

Vi observerar att

$$\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}}) = \mathrm{Tr}((BA)^{\mathrm{t}}) = \mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB)\,.$$

Alltså gäller $\langle T_\alpha(A), B\rangle = \langle A, T_\alpha(B)\rangle$ för all $\alpha \in \mathbb{R}$ och $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Vi kan alltså dra slutsatsen att T_α är diagonaliserbar relativ till en ortonormal bas för alla $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet "QR-uppdelning av en komplex matris".

   (b) **(4 poäng)** Beräkna en QR-uppdelning för matrisen

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \sqrt{2}-2 \\ 1 & 1 & -2 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}.$$

Lösning

(a) Se bok eller förläsningsanteckningar.

(b) Genom att tilllämpa Gram-Schmits metoden till kolonner av matrisen A hittar vi QR-uppdelningen $A = QR$ med

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet "symmetrisk bilinjär form".

   (b) **(4 poäng)** Beräkna rang och signaturen av den kvadratiska form $K : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ som uppfyller

$$K(v) = v_1v_3 - v_2v_4\,.$$

Lösning

(a) Se bok eller förläsningsanteckningar.

(b) Vi hittar först symetriska biljinjärformen till K, som uppfyller

$$B(v,w) = \frac{1}{2}(K(v+w) - K(v) - K(w)) = \frac{1}{2}(v_1w_3 - v_2w_4 + v_3w_1 - v_4w_2)\,.$$

Matrisrepresentationen av B relativ till standard ordnad basen β av $\mathbb{R}^4$ är

$$A = [B]_\beta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man beräknar egenvärde av A som är $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ och kan dra slutsatsen att rangen av K är 4 och signaturen är 0.

6. (a) **(2 poäng)** Låt $T : V \to W$ vara en bijektiv linjär avbilding och låt $T^{-1} : W \to V$ vara inversen, som uppfyller $T^{-1}(T(v)) = v$ för alla $v \in V$. Bevisa att T^{-1} är linjär.

(b) **(3 poäng)** Låt $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ vara en komplex matris. Bevisa att U är unitär om och endast om kolonnerna av U utgör en ortonormal bas till $\mathbb{C}^n$.

Lösning

(a) Se bok eller förläsningsanteckningar.

(b) Se bok eller förläsningsanteckningar.