MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Kursansvarig: Erik Lindell

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
25 oktober, 2022

15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$ och
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) **(1 poäng)** Låt $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ vara en delmängd av ett vektorrum V sådan att $v_i \neq v_j$ då $i \neq j$. Ange definitionen av att delmängden är *linjärt beroende.*

   (b) **(4 poäng)** Låt $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ vara den linjära avbildning som för $p \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ definieras som

$$T(p) = p(1)(1 + x^3) + p'(1)(x - x^2).$$

   Bestäm baser för bildrummet $R(T)$ och nollrummet $N(T)$, samt beräkna dimensionen av båda dessa vektorrum.

Lösning

(a) Antag att V är ett F-vektorrum för en kropp F. Delmängden $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ är linjärt beroende om det existerar skalärer $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ sådana att

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$$

och $a_i \neq 0$ för minst ett $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(b) Vi börjar med att bestämma matrisrepresentationen för T i förhållande till de ordnade standardbaserna $\beta = (1, x, x^2)$ och $\beta' = (1, x, x^2, x^3)$ för $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ respektive $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$. Vi har

$$\begin{aligned} T(1) &= 1(1 + x^3) + 0(x - x^2) = 1 + x^3, \\ T(x) &= 1(1 + x^3) + 1(x - x^2) = 1 + x - x^2 + x^3, \\ T(x^2) &= 1(1 + x^3) + 2(x - x^3) = 1 + 2x - 2x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Kolonnerna i $[T]_\beta^{\beta'}$ är β'-koordinatvektorerna för dessa vektorer, så vi får

$$[T]_\beta^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi beräknar nollrummet av matrisen genom att Gausseliminera matrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså att $x \in \mathbb{R}^3$ ligger i matrisens nollrum om och endast om $x_1 = x_3$ och $x_2 = -2x_3$ och därmed kan skrivas som $x = (1, -2, 1)x_3$. Översatt från β-koordinater så får vi alltså att en bas för $N(T)$ ges av

$$\{1 - 2x + x^2\}.$$

Vi har därmed alltså $\dim N(T) = 1$.

Vi minns även att matrisens bildrum är lika med dessa kolonnrum. Gausselimineringen visar att de två första kolonnerna i matrisen är linjärt oberoende, medan den tredje är en linjärkombination av dessa. Alltså får vi att de första två kolonnerna bildar en bas för kolonnrummet och översatt från β'-koordinater ger detta att en bas för $R(T)$ är

$$\{1 + x^3, 1 + x - x^2 + x^3\}.$$

Genom att subtrahera den första basvektorn från den andra ser vi även att $\{1 + x^3, x - x^2\}$ är en bas för $R(T)$. Vi har därmed $\dim R(T) = 2$. Vi kan även kontrollera att detta stämmer överens med dimensionssatsen, som säger att $\dim N(T) + \dim R(T) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

2. (a) **(2 poäng)** Låt $L : V \to V$ vara en linjär operator på ett $\mathbb{C}$-vektorrum V och $\lambda \in \mathbb{C}$ en skalär. Ange definitionen av *egenrummet* $E_\lambda(L)$ tillhörande λ och visa att $E_\lambda(L)$ är ett delrum av V.

   (b) **(3 poäng)** Låt $L : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ vara den linjära avbildning som definieras som

   $$L(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - z_3, 0, z_3 - z_1)\,.$$

   Beräkna alla egenvärden för L och deras tillhörande egenrum, samt ange en bas för $\mathbb{C}^3$ bestående av egenvektorer till L.

Lösning

(a) Egenrummet definieras som

$$E_\lambda(L) := \{v \in V \mid L(v) = \lambda v\}.$$

Det består alltså av alla egenvektorer med egenvärde λ, tillsammans med nollvektorn. För att visa att detta är ett delrum behöver vi visa att

- $E_\lambda(L) \neq \varnothing$,
- om $v, w \in E_\lambda(L)$ så är även $v + w \in E_\lambda(L)$, samt att
- om $v \in E_\lambda(L)$ och $c \in \mathbb{C}$ så är även $cv \in E_\lambda(L)$.

Vi har redan noterat att nollvektorn ligger i $E_\lambda(L)$, då $L(0) = 0 = \lambda \cdot 0$. Alltså är $E_\lambda(L)$ icke-tomt. Låt nu $v, w \in E_\lambda(L)$. Att L är linjär ger

$$L(v + w) = L(v) + L(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v + w).$$

Alltså är även $v + w \in E_\lambda(L)$. Låt nu $v \in E_\lambda(L)$ och $c \in \mathbb{C}$. Att L är linjär ger

$$L(cv) = cL(v) = c(\lambda v) = \lambda(cv).$$

Alltså är $cv \in E_\lambda(L)$. Detta visar att $E_\lambda(L)$ är ett delrum av V.

(b) Vi skriver första om avbildningen som en matrisavbildning. Vi har

$$\begin{aligned} L(1,0,0) &= (1,0,-1), \\ L(0,1,0) &= (0,0,0), \\ L(0,0,1) &= (-1,0,1), \end{aligned}$$

vilket ger att $L(z) = Az$, där A är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi beräknar L's egenvärden med hjälp av A's karaktäristiska polynom:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) - (-\lambda) \\ &= -\lambda((1-\lambda)^2 - 1) \\ &= -\lambda(1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1) \\ &= -\lambda^2(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Nollställena och alltså egenvärdena ges av 0 och 2. Vi beräknar motsvarande egenrum, som är nollrummen till matriserna $A - 0I_3$ respektive $A - 2I_3$. Om vi börjar med egenvärdet 0 får vi

$$A - 0I_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egenvektorer z med egenvärde 0 måste alltså uppfylla $z_1 = z_3$ och kan därmed skrivas

$$z = (z_3, z_2, z_3) = (1,0,1)z_3 + (0,1,0)z_2.$$

Egenrummet är alltså

$$E_0(L) = \operatorname{span}\{(1,0,1),(0,1,0)\}.$$

För egenvärdet 2 får vi

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så egenvektorer z med egenvärde 2 måste alltså uppfylla $z_1 = -z_3$ och $z_2 = 0$. De kan alltså skrivas

$$z = (1,0,-1)z_3,$$

så egenrummet är

$$E_2(L) = \operatorname{span}\{(1,0,-1)\}.$$

Vi får en bas av egenvektorer för $\mathbb{C}^3$ genom att välja en bas av egenvektorer för varje egenrum, så vi kan exempelvis välja basen

$$\{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,-1)\}.$$

3. (a) **(1 poäng)** Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett inre produktrum. Definiera T's *adjungerade* avbildning.

   (b) **(4 poäng)** Betrakta problemet att hitta ett polynom $p \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ vars graf går genom punkterna $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ och $(2, 3)$ i $\mathbb{R}^2$. Finn en *minsta kvadratapproximation* till detta problem, dvs. ett polynom $p \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ som minimerar

$$(p(-1) - 2)^2 + (p(0) - 1)^2 + (p(1) - 2)^2 + (p(2) - 3)^2.$$

Lösning

(a) Den adjungerade avbildningen av T är den unika avbildning $T^* : V \to V$ som uppfyller

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

för varje $x, y \in V$.

(b) Problemet kan formuleras som att finna det $p \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ som uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{aligned} p(-1) &= 2, \\ p(0) &= 1, \\ p(1) &= 2, \\ p(2) &= 3. \end{aligned}$$

Ett polynom $p \in P_2(\mathbb{R})$ kan skrivas $p(x) = ax^2 + bx + c$, för $a, b, c \in \mathbb{R}$, så vi kan skriva om problemet som att hitta $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller det linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 1a - 1b + c &= 2, \\ 0a + 0b + c &= 1, \\ 1^2a + 1b + c &= 2, \\ 2^2a + 2b + c &= 3. \end{aligned}$$

Om vi låter $x = (a, b, c)^T$ kan vi skriva detta som matrisekvationen $Ax = b$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vi minns från Föreläsning 10, samt kapitel 6.3 i boken, att en minsta kvadratlösning till ekvationssystemet löser ekvationen $A^*Ax = A^*b$. Vi har

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

och

$$A^*b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Vi löser ekvationsystemet $A^*Ax = A^*b$ genom Gausseliminering:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 8 & 6 & 16 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 4 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -13 \end{array}\right)
$$

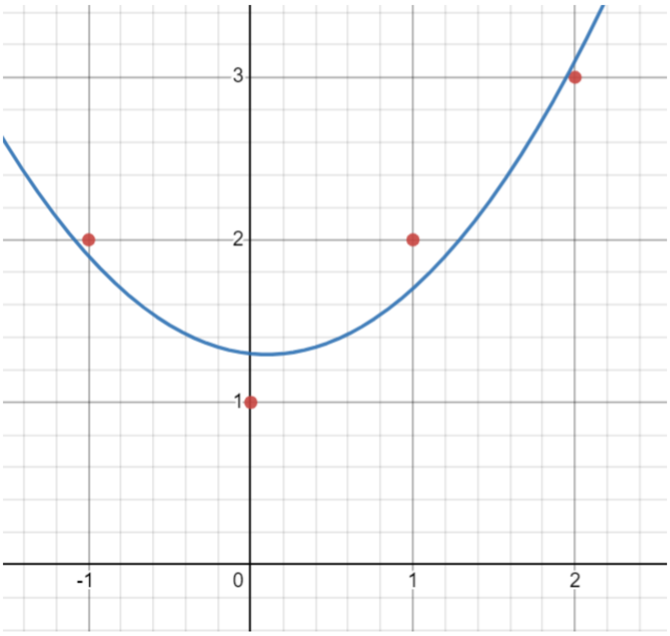
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 13/10 - 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \cdot 13/10 - 4 \\ 0 & 0 & 1 & 13/10 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 13/10 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 13/10 \end{array}\right).
$$

Vår minsta kvadratlösning ges alltså av $x = (a, b, c) = (5/10, -1/10, 13/10)$, så vi får polynomet

$$
p(x) = \frac{5x^2 - x + 13}{10},
$$

som alltså är vårt svar. Vi kan plotta punkterna och polynomet för att se hur väl det passar:



Figur 1: Minsta kvadratlösningen i Uppgift 3(b).

4. (a) **(1 poäng)** Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett ändligtdimensionellt inre produktrum. Ange definitionen av att T är *unitär*.

   (b) **(4 poäng)** Beräkna en QR-uppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}).$$

Lösning

(a) Här finns det flera vanliga och ekvivalenta definitioner. De två vanligaste är som följer:

- T är unitär om $\|T(x)\| = \|x\|$ för alla $x \in V$.
- T är unitär om $T^* \circ T = \mathrm{id}_V = T \circ T^*$, där T^* är T's adjungerade operator.

(b) Det första steget i en QR-faktorisering är att tillämpa Gram-Schmidts metod på kolonnerna i A för att finna en ON-bas för dess kolonnrum. Låt oss kalla kolonnerna, från vänster till höger, för a_1, a_2 och a_3
Vi börjar med att sätta $v_1 = a_1$ och normerar för att få

$$q_1 = v_1/\|v_1\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi sätter sedan

$$v_2 = a_2 - \langle a_2, q_1 \rangle q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vi normerar och sätter

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Slutligen sätter vi

$$v_3 = a_3 - \langle a_3, q_1 \rangle - \langle a_3, q_2 \rangle q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi normerar och får

$$q_3 = v_3/\|v_3\| = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi har nu att $\{q_1, q_2, q_3\}$ är en ON-bas för kolonnrummet av A, som vi nu behöver utvidga till en ON-bas för *hela* $\mathbb{R}^4$. Vi gör detta genom att finna en ON-bas för $\mathrm{col}(A)^\perp$. En vektor x ligger i detta delrum om den uppfyller $\langle x, y\rangle = 0$ för varje $y \in \operatorname{col}(A)$, vilket är ekvivalent med att lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned}\langle x, q_1\rangle &= 0,\\ \langle x, q_2\rangle &= 0,\\ \langle x, q_3\rangle &= 0.\end{aligned}$$

Om vi skriver ut dessa ekvationer får vi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3) &= 0,\\ \frac{1}{\sqrt{15}}(-2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4) &= 0,\\ \frac{1}{\sqrt{10}}(2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4) &= 0.\end{aligned}$$

Vi multiplicerar bort den konstanta faktorn i varje ekvation och Gausseliminerar det resulterande systemets matris:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 3\\ 0 & -3 & -3 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ \sim &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vi ser alltså att x löser ekvationssystemet om och endast om $x_1 = x_4 = 0$, samt $x_2 = -x_3$. Vi normerar och får därmed vår sista basvektor till

$$q_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Vi sätter nu

$$Q = (q_1\ q_2\ q_3\ q_4) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{15} & 2/\sqrt{10} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{15} & -1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{15} & -1/\sqrt{10} & -1/\sqrt{2}\\ 0 & 3/\sqrt{15} & 2/\sqrt{10} & 0\end{pmatrix}$$

och beräknar slutligen

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0\\ -2/\sqrt{15} & 1/\sqrt{15} & 1/\sqrt{15} & 3/\sqrt{15}\\ 2/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 5/\sqrt{15} & 1/\sqrt{15}\\ 0 & 0 & 4/\sqrt{10}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

För att sammanfatta blir alltså vår QR-faktorisering

$$A = QR = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{15} & 2/\sqrt{10} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{15} & -1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{15} & -1/\sqrt{10} & -1/\sqrt{2}\\ 0 & 3/\sqrt{15} & 2/\sqrt{10} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 5/\sqrt{15} & 1/\sqrt{15}\\ 0 & 0 & 4/\sqrt{10}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

5. (a) **(1 poäng)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan ändligtdimensionella inre produktrum V och W. Ange definitionen av T's *singulärvärden.*

   (b) **(4 poäng)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}).$$

Lösning

(a) Även här finns det flera ekvivalenta definitioner. Låt $r = \mathrm{rank}(T)$ och $k = \min(m, n)$. Då kan vi definiera singulärvärdena som följer:

- Enligt singulärvärdessatsen existerar ON-baser $\{v_1, \ldots, v_n\}$ och $\{u_1, \ldots, u_m\}$ för V respektive W samt positiva reella skalärer $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \sigma_r > 0$, sådana att

$$T(v_i) = \begin{cases} \sigma_i u_i & \text{för } i \leq r, \\ 0 & \text{för } i > r. \end{cases}$$

  Om vi inför $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_k = 0$ så kallas skalärerna $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ för T's *singulärvärden.*
- Vi kan även låta $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ vara de nollskilda egenvärdena för $T^* \circ T$, där T^* är T's adjungerade avbildning. Man kan visa att $T^* \circ T$ har icke-negativa reella egenvärden, så vi kan definiera $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ för $i = 1, \ldots, r$. Vi sätter sedan som ovan $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_k = 0$ och kallar skalärerna $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ för T's singulärvärden.

(b) Kom ihåg att en singulärvärdesuppdelning av A är en faktorisering

$$A = U\Sigma V^T,$$

där $U \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ och $V \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ är ortogonala matriser, samt $\Sigma \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ är en diagonal matris med singulärvärdena för A på diagonalen i minskande ordning, dvs

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

där $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ är singulärvärdena för A. För att beräkna en singulärvärdesuppdelning börjar vi därmed med att bestämma egenvärdena för A^*A. Vi har

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}.$$

Vi får det karaktäristiska polynomet

$$\begin{aligned} \det(A^*A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 10-\lambda & -6 & 0 \\ -6 & 10-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 36-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (36-\lambda)((10-\lambda)^2 - 36) \\ &= (36-\lambda)(\lambda^2 - 20\lambda + 64). \end{aligned}$$

Vi ser att ett egenvärde är 36 och får de andra med hjälp av pq-formeln:

$$\lambda = 10 \pm \sqrt{100-64} = 10 \pm \sqrt{36} = 10 \pm 6.$$

De övriga egenvärdena blir alltså 4 och 16. Vi får därmed att singulärvärdena blir $\sqrt{36} \geq \sqrt{16} \geq \sqrt{4}$, dvs $6 \geq 4 \geq 2$ (notera att vi inte kan ha fler än 3 singulärvärden då A är en 4×3-matris). Vi får alltså

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För att beräkna V bestämmer vi egenvektorerna för A^*A. Vi har

$$A^*A - 36I_3 = \begin{pmatrix} -26 & -6 & 0 \\ -6 & -26 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

så $x \in \mathbb{R}^3$ är en egenvektor om och endast om $x_1 = x_2 = 0$. En normerad egenvektor är därmed

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi fortsätter med egenvärdet 16:

$$A^*A - 16I_3 = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

så vi ser att $x \in \mathbb{R}^3$ är en egenvektor om och endast om $x_1 = -x_2$ och $x_3 = 0$. En normerad egenvektor ges därför av

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

För egenvärdet 4 får vi på samma sätt

$$A^*A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

så $x \in \mathbb{R}^3$ är en egenvektor om och endast om $x_1 = x_2$ och $x_3 = 0$. En normerad egenvektor är därför

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi sätter alltså

$$V = (v_1 \ v_2 \ v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi kan nu beräkna de första kolonnerna i U som

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \frac{1}{\sigma_3} A v_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Slutligen behöver vi utvidga $\{u_1, u_2, u_3\}$ till en ON-bas för hela $\mathbb{R}^4$ för att få en sista kolonn till U. Vi gör detta på samma sätt som i föregående uppgift och ställer upp ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \langle x, u_1 \rangle &= 0, \\ \langle x, u_2 \rangle &= 0, \\ \langle x, u_3 \rangle &= 0, \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ x_2 + x_4 &= 0, \\ x_1 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vi får matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså att $x \in \mathbb{R}^4$ löser ekvationssystemet om och endast om $x_1 = x_4$, $x_2 = -x_4$ och $x_3 = -x_4$. En normerad lösning ges av

$$u_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi sätter därmed

$$U = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

För att sammanfatta blir alltså vår singulärvärdesuppdelning

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (a) **(3 poäng)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum V och W. Ange definitionen av att T är *injektiv* respektive *surjektiv* och ange sambanden mellan dessa egenskaper och nollrummet $N(T)$ respektive bildrummet $R(T)$. Bevisa sedan sambandet mellan injektivitet och nollrummet som du har angett.

   (b) **(2 poäng)** Visa att om $\dim V = \dim W < \infty$ så är T injektiv om och endast om den är surjektiv.

Lösning

(a) Vi säger att T är *injektiv* om $T(v_1) = T(v_2)$ implicerar att $v_1 = v_2$, för $v_1, v_2 \in V$. En linjär avbildning T är injektiv om och endast om $N(T) = \{0\}$. Vi säger att T är *surjektiv* om det för varje $w \in W$ existerar en vektor $v \in V$ sådan att $T(v) = w$. Detta är sant om och endast om $R(T) = W$.

För att visa att T är injektiv om och endast om $N(T) = \{0\}$ måste vi visa två implikationer. Vi antar första att T är injektiv. Om $v \in V$ är en vektor sådan att $T(v) = 0$ har vi $T(v) = T(0)$, så injektivitet implicerar att $v = 0$. Alltså är $N(T) = \{0\}$. Detta visar den första implikationen. Vi antar nu att $N(T) = \{0\}$ och att $v_1, v_2 \in V$ är sådana att $T(v_1) = T(v_2)$. Då följer av linjäritet att

$$0 = T(v_1) - T(v_2) = T(v_1 - v_2),$$

så $v_1 - v_2$ ligger i $N(T)$. Av antagandet följer att $v_1 - v_2 = 0$, dvs $v_1 = v_2$. Alltså är T injektiv. Detta visar den andra implikationen.

(b) För att visa detta använder vi oss av *dimensionssatsen*. Vi minns att dimensionssatsen säger att

$$\dim N(T) + \dim R(T) = \dim V.$$

Om T är surjektiv är $R(T) = W$, så det följer att

$$\dim N(T) = \dim V - \dim R(T) = \dim V - \dim W = 0,$$

då vi antagit att $\dim V = \dim W$. Då $\dim N(T) = 0$ är $N(T) = \{0\}$, då ett vektorrum är 0-dimensionellt om och endast om det endast innehåller en nollvektor. Alltså är T injektiv, enligt (a).

Antag nu istället att T är injektiv. Då vet vi från (a) att $N(T) = \{0\}$, så $\dim N(T) = 0$. Alltså följer av dimensionsatsen och antagandet att $\dim V = \dim W$ att

$$\dim R(T) = \dim V = \dim W.$$

Då $R(T) \subseteq W$ följer att $R(T) = W$. Alltså är T surjektiv.

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en elektronisk kopia av tentan beställas från studentexpeditionen genom länken https://survey.su.se/Survey/44514/sv.