MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Kursansvarig: Erik Lindell

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
25 oktober, 2022

15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$ och
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) **(1 poäng)** Låt $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ vara en delmängd av ett vektorrum V sådan att $v_i \neq v_j$ då $i \neq j$. Ange definitionen av att delmängden är *linjärt beroende*.
   (b) **(4 poäng)** Låt $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ vara den linjära avbildning som för $p \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ definieras som
   $$T(p) = p(1)(1 + x^3) + p'(1)(x - x^2).$$
   Bestäm baser för bildrummet $R(T)$ och nollrummet $N(T)$, samt beräkna dimensionen av båda dessa vektorrum.

2. (a) **(2 poäng)** Låt $L : V \to V$ vara en linjär operator på ett $\mathbb{C}$-vektorrum V och $\lambda \in \mathbb{C}$ en skalär. Ange definitionen av *egenrummet* $E_\lambda(L)$ tillhörande λ och visa att $E_\lambda(L)$ är ett delrum av V.
   (b) **(3 poäng)** Låt $L : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ vara den linjära avbildning som definieras som
   $$L(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - z_3, 0, z_3 - z_1)\,.$$
   Beräkna alla egenvärden för L och deras tillhörande egenrum, samt ange en bas för $\mathbb{C}^3$ bestående av egenvektorer till L.

3. (a) **(1 poäng)** Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett inre produktrum. Definiera T's *adjungerade* avbildning.
   (b) **(4 poäng)** Betrakta problemet att hitta ett polynom $p \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ vars graf går genom punkterna $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ och $(2, 3)$ i $\mathbb{R}^2$. Finn en *minsta kvadratapproximation* till detta problem, dvs. ett polynom $p \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ som minimerar
   $$(p(-1) - 2)^2 + (p(0) - 1)^2 + (p(1) - 2)^2 + (p(2) - 3)^2.$$

4. (a) **(1 poäng)** Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett ändligtdimensionellt inre produktrum. Ange definitionen av att T är *unitär*.

   (b) **(4 poäng)** Beräkna en QR-uppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}).$$

5. (a) **(1 poäng)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan ändligtdimensionella inre produktrum V och W. Ange definitionen av T's *singulärvärden*.

   (b) **(4 poäng)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}).$$

6. (a) **(3 poäng)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum V och W. Ange definitionen av att T är *injektiv* respektive *surjektiv* och ange sambanden mellan dessa egenskaper och nollrummet $N(T)$ respektive bildrummet $R(T)$. Bevisa sedan sambandet mellan injektivitet och nollrummet som du har angett.

   (b) **(2 poäng)** Visa att om $\dim V = \dim W < \infty$ så är T injektiv om och endast om den är surjektiv.

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en elektronisk kopia av tentan beställas från studentexpeditionen genom länken https://survey.su.se/Survey/44514/sv.