STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
MM2002 Matematik för naturvetenskaper I
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
2022-10-26

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

---

1. **(2+3 p.)** Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3-e^x}{x}\sin x, \qquad \lim_{x\to -4} \frac{x^2+3x-4}{x^2+6x+8}.$$

Lösning: Ett standardgränsvärde är $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Därför har vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{3-e^x}{x}\sin x = \lim_{x\to 0}(3-e^x)\frac{\sin x}{x} = (3-e^0)1 = 2.$$

För det andra gränsvärdet försvinner både täljare och nämnare i $x=-4$. Vi faktoriserar och förkortar:

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2+6x+8} = \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2} \to \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}, \quad x\to -4.$$

2. **(5 p.)** För alla reella a bestäm antalet lösningar till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned}(5-a)x_1 + 2x_2 &= 1,\\ 2x_1 + (5-a)x_2 &= 1,\\ -3x_1 + 4x_2 + (6-a)x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Lösning: Detta ekvationssystem kan skrivas

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

där

$$A = \begin{pmatrix}5-a & 2 & 0\\ 2 & 5-a & 0\\ -3 & 4 & 6-a\end{pmatrix}.$$

Determinanten av A ges då av

$$\det A = (5-a)^2(6-a) - (6-a)2\cdot 2 = (6-a)\big(a^2-10a+25-4\big),$$

vilket är lika med noll om och endast om $a=6$ eller $a = 5\pm\sqrt{25-21}$, alltså

$$a=3 \quad \text{eller} \quad a=6 \quad \text{eller} \quad a=7.$$

Konsekvens: För alla $a\neq 3,6,7$ har ekvationssystemet en entydig lösning. Vi testar de övriga tre fallen separat.

$a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 7 & 3 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

och detta är på trappstegsform med två pivotelement men tre variabler. Därför finns det oändligt många lösningar.

$a = 6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

och den sista raden ger en motsägelse. Det finns alltså ingen lösning.

$a = 7$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

som direkt ger en motsägelse. Därför finns det ingen lösning.

3. **(1+3+1 p.)** Låt $f(x) = \frac{x-2}{(x+4)(x-1)}$ där $x \notin \{-4, 1\}$.
   (a) Bestäm derivatan f' till f.
   (b) Finn alla lokala minimi- och maximipunkter till f och undersök var f är växande resp. avtagande.
   (c) Skissa grafen av f. (Tips: $\sqrt{6} \approx 2,45$.)

Lösning:

(a) Vi har $f(x) = \frac{x-2}{x^2+3x-4}$ och därför

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2+3x-4) - (x-2)(2x+3)}{(x+4)^2(x-1)^2} = \frac{x^2+3x-4-2x^2+x+6}{(x+4)^2(x-1)^2} \\ &= \frac{-x^2+4x+2}{(x+4)^2(x-1)^2}. \end{aligned}$$

(b) Funktionen är definierad för alla x förutom $x = -4$ och $x = 1$. Derivatans nollställen ges av

$$x = 2 \pm \sqrt{4+2} = 2 \pm \sqrt{6},$$

och derivatan kan därför faktoriseras

$$f'(x) = -\frac{(x-(2+\sqrt{6}))(x-(2-\sqrt{6}))}{(x+4)^2(x-1)^2},$$

och detta är positivt på $(2-\sqrt{6},1)\cup(1,2+\sqrt{6})$ och negativ på $(-\infty,-4)\cup(-4,2-\sqrt{6})\cup(2+\sqrt{6},\infty)$. Alltså:

$$f\begin{cases}\text{växer på } (2-\sqrt{6},1)\cup(1,2+\sqrt{6}),\\ \text{tar av på } (-\infty,-4)\cup(-4,2-\sqrt{6})\cup(2+\sqrt{6},\infty).\end{cases}$$

Särskilt har f ett lokalt minimum i $2-\sqrt{6}$ och ett lokalt maximum i $2+\sqrt{6}$.

(c) Skissen ska tillverkas med hjälp av resultaten av (b). Beakta beteendet nära -4 och 1 samt när $x\to\pm\infty$.

4. **(5 p.)** Bestäm största och minsta värdet för funktionen $f(x,y)=\frac{x^2}{1-x^2-y^2}$ på det område i planet som beskrivs av $x^2+y^2\leq\frac{1}{4}$.

Lösning:

Vi kollar först på kritiska punkter och beräknar därför de partiella derivatorna:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x(1-x^2-y^2)-x^2(-2x)}{(1-x^2-y^2)^2}=\frac{2x(1-y^2)}{(1-x^2-y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-x^2(-2y)}{(1-x^2-y^2)^2}=\frac{2x^2y}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

Om $x=0$ och y är godtyckligt, så blir båda partiella derivator noll. Det finns inga lösningar med $x\neq 0$ ty då skulle vi samtidigt behöva $y^2=1$ och $y=0$. På de kritiska punkterna $(0,y)$ som ligger inom cirkelskivan gäller det alltid

$$f(0,y)=0.$$

Vi undersöker områdets rand, cirkeln av radie $1/2$. Vi kan parametrisera den med $x=\frac{1}{2}\cos t$, $y=\frac{1}{2}\sin t$ med $0\leq t\leq 2\pi$. Funktionen som ska undersökas är då

$$g(t)=f(x,y)=\frac{\frac{1}{4}\cos^2 t}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\cos^2 t,$$

och den blir maximal i $t=0$ och $t=\pi$ (motsvarande $(x,y)=(1/2,0)$ och $(x,y)=(-1/2,0)$) och minimal i $t=\pi/2$ och $t=3\pi/2$ (motsvarande $(x,y)=(0,1/2)$ och $(x,y)=(0,-1/2)$).

Vi har nu fyra kandidatpunkter på randen och beräknar funktionsvärdena. De blir

$$f(1/2,0)=f(-1/2,0)=\frac{1}{3},$$
$$f(0,1/2)=f(0,-1/2)=0.$$

Därmed är funktionens maximum på området lika med $1/3$ och minimum lika med noll.

5. **(3+1+1 p.)** Låt $\mathbb{B}=(e_1,e_2,e_3)$ vara en ON-bas i rummet.

   (a) Visa att $\widetilde{\mathbb{B}}=(e_1-e_2,e_1+2e_2,e_3)$ också är en bas i rummet.

   (b) Är $\widetilde{\mathbb{B}}$ även en ON-bas?

(c) Om vektorn $\vec{v}$ har koefficienter $(-1, 1, 3)$ i basen $\widetilde{\mathbb{B}}$, vilka koefficienter har då $\vec{v}$ i basen $\mathbb{B}$?

Lösning: (a) Det är tre vektorer, det räcker alltså att visa att de är linjärt oberoende. Ekvationssystemet

$$\lambda_1(e_1 - e_2) + \lambda_2(e_1 + 2e_2) + \lambda_3 e_3 = \vec{0}$$

är ekvivalent med

$$(\lambda_1 + \lambda_2)e_1 + (-\lambda_1 + 2\lambda_2)e_2 + \lambda_3 e_3 = \vec{0},$$

och ty (e_1, e_2, e_3) är linjärt oberoende, får vi

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0,$$

och detta ekvationssystem har den entydiga lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
(b) Nej, t.ex. har $e_1 - e_2$ inte längd ett:

$$|e_1 - e_2|^2 = (e_1 - e_2) \cdot (e_1 - e_2) = |e_1|^2 + |e_2|^2 = 2.$$

(c)

$$\vec{v} = -(e_1 - e_2) + (e_1 + 2e_2) + 3e_3 = 3e_2 + 3e_3,$$

$\vec{v}$ har alltså koordinater $(0, 3, 3)$ i basen $\mathbb{B}$.

6. **(3+2 p.)**

(a) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = xye^x$ som uppfyller $y(0) = 2$.
(b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' - \frac{9}{2}y' + 2y = 0$.

Lösning:
(a) Denna differentialekvation har separabla variabler och kan därför skrivas som

$$\int \frac{1}{y} \mathrm{d}y = \int xe^x \mathrm{d}x.$$

Integralen med avseende på x kan beräknas med hjälp av partialintegration:

$$\int xe^x \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \mathrm{d}x = e^x(x-1) + C,$$

där $C \in \mathbb{R}$ är godtycklig. Vi får alltså

$$\ln|y| = e^x(x-1) + C. \tag{1}$$

Vi kan redan nu bestämma konstanten C: stoppar vi in punkten $(x, y) = (0, 2)$ i den sista raden så får vi

$$\ln 2 = -1 + C,$$

alltså $C = 1 + \ln 2$. Ekvationen (1) ger då

$$|y| = e^{e^x(x-1)+1+\ln 2}.$$

Eftersom vi vet att $y(0) = 2$ är positiv, följer det

$$y = e^{1+\ln 2} e^{e^x(x-1)} = 2e \cdot e^{e^x(x-1)}.$$

(b) Det här handlar om en andra ordningens linjär, homogen differentialekvation. Dess karakteristiska ekvation är $\lambda^2 - \frac{9}{2}\lambda + 2 = 0$ och har lösningarna

$$\lambda = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - \frac{32}{16}},$$

dvs. $\lambda = 4$ eller $\lambda = \frac{1}{2}$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen är då

$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{x/2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tentamensåterlämning annonseras på kurshemsidan.