STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, MD

MT 3001
LÖSNINGAR
26 oktober 2022

Lösningar

26 oktober 2022

Uppgift 1

Rätt svar är

a) 3. $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$

b) 2. Poisson(c)

c) 2. $2 - 2\Phi(1.5)$

d) 1. falskt

e) 3. $\text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Uppgift 2

Låt V beteckna händelsen att en slumpvis vald person är högerhänt och S_v händelsen att personen har sitt språkcentrum i höger hjärnhalva.

a) Lagen om total sannolikhet ger

$$\mathbb{P}(S_v) = \mathbb{P}(S_v|V)\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(S_v|V^c)\mathbb{P}(V^c) = 0.7 \cdot 0.1 + 0.95 \cdot 0.9 = 0.925.$$

b) Bayes sats ger:

$$\mathbb{P}(V|S_v) = \frac{\mathbb{P}(S_v|V)\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}(S_v)} = \frac{0.7 \cdot 0.1}{0.925} = 0.076.$$

Uppgift 3

a) Villkoret $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ ger $c\int_1^\infty \frac{c}{x^4}dx = c/3 = 1$ och alltså $c = 3$.

b) Fördelningsfunktionen ges av $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. För $x \geq 1$ har vi att $\mathbb{P}(X \leq x) = \int_1^x \frac{3}{t^4}dt = 1 - \frac{1}{x^3}$ och för $x < 1$ gäller att $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$. Alltså:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^3} & \text{om } x \geq 1; \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

c) Vi har $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{3x^3}dx = \frac{3}{2}$. Vidare har vi att $\mathbb{E}[X^2] = \int_1^\infty \frac{3}{x^2}dx = 3$ och alltså $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{3}{4}$.

Uppgift 4

Låt X_i vara längden av det i-te årtaget och $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Då gäller att $\mathbb{E}[S_n] = 9n$ och $\mathrm{Var}(X_i) = 9n$ (eftersom årtagens längd är oberoende).

a) Vi söker $\mathbb{P}(S_{325} > 3000)$. Enligt Centrala gränsvärdessatsen är S_{325} approximativt normalfördelad, eftersom det är en summa av många oberoende lika fördelade stokastiska variabler. Låt Φ beteckna fördelningsfunktionen för N(0,1)-fördelningen. Vi får då

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{325} > 3000) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_{325} - \mathbb{E}[S_{325}]}{\mathrm{Var}(S_{325})} > \frac{3000 - \mathbb{E}[S_{325}]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_{325})}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{3000 - 2925}{\sqrt{2925}}\right) = 1 - \Phi(1.39) = 0.083. \end{aligned}$$

b) Vi vill bestämma n så att $\mathbb{P}(S_n > 3000) = 0.95$ och noterar att

$$\mathbb{P}(S_n > 3000) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} > \frac{3000 - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{3000 - 9n}{\sqrt{9n}}\right),$$

Ska denna sannolikhet vara 0.95 måste $(3000-9n)/\sqrt{9n}$ ges av 0.05-kvantilen i N(0,1)-fördelningen med omvänt tecken, dvs $(3000 - 9n)/\sqrt{9n} = -1.6449$. Detta leder till en andragradsekvation som har lösning $n = 343.49$, dvs roddaren måste ta 344 årtag för att sannolikheten att hon kommer 3000 meter ska vara 95%.

Uppgift 5

Variablerna X och Y är Bernoullifördelade med parameter $\mathbb{P}(A)$ respektive $\mathbb{P}(B)$. Vi har alltså $\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(A)$, $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A^c)$, $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{P}(B)$ och $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(B^c)$. Dessutom gäller att $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(A \cap B)$ så att $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Alltså

$$\mathrm{Ber}(A, B) = \rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\sqrt{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(B^c)}}.$$

(i) $B = A$ ger $\mathrm{Ber}(A, B) = \mathrm{Ber}(A, A) = \rho(X, X) = 1$;

(ii) $B = A^c$ ger $Y = 1-X$ och $\mathrm{Ber}(A, B) = \rho(X, 1-X) = \rho(X, -X) = -1$;

(iii) A och B oberoende medför att X och Y är oberoende och alltså $\mathrm{Ber}(A, B) = \rho(X, Y) = 0$;

(iv) $A \cap B = \emptyset$ betyder att $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$, vilket ger

$$\mathrm{Ber}(A, B) = -\sqrt{\frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)}}.$$

Uppgift 6

a) Sannolikheten att en given valör *inte* finns med i handen är $\binom{52-4}{13}/\binom{52}{13} \approx 0.3038$, eftersom samtliga 13 kort då måste väljas bland de 52-4 kort som inte har den givna valören. Den sökta sannolikheten blir alltså $1 - 0.3038 = 0.6962$.

b) För $i = 1, \ldots, 13$, låt

$$V_i = \begin{cases} 1 & \text{om valör } i \text{ finns med i handen;} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Antalet valörer som finns representerade i handen ges då av $V = \sum_{i=1}^{13} V_i$ och $\mathbb{E}[V] = \sum_{i=1}^{13} \mathbb{E}[V_i]$. Enligt a-uppgiften har vi att $\mathbb{E}[V_i] = 0.6962$ och alltså $\mathbb{E}[V] = 13 \cdot 0.6962 = 9.0504$.