MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Kursansvarig: Erik Lindell

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
6 december, 2022

15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$ och
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) **(1 poäng)** Låt $T : V \to W$ vara en avbildning mellan vektorrum. Ange definitionen av att T är *linjär*.

   (b) **(4 poäng)** Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ges av
   $$T(x, y, z) = 2x + y - z.$$
   Visa att T är linjär, samt bestäm baser för nollrummet $\mathrm{N}(T)$ och bildrummet $\mathrm{R}(T)$. Beräkna även dimensionerna av $\mathrm{N}(T)$ och $\mathrm{R}(T)$.

2. (a) **(1 poäng)** Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator. Ange definitionen av ett *egenvärde* av T.

   (b) **(4 poäng)** Betrakta operatorn $T : \mathrm{P}_1(\mathbb{C}) \to \mathrm{P}_1(\mathbb{C})$ som ges av
   $$p(x) \mapsto p(-1) + p(1)x.$$
   Beräkna alla egenvärden för T och deras tillhörande egenvektorer.

3. (a) **(1 poäng)** Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett inre produktrum. Ange definitionen av att T är en *normal* operator.

   (b) **(1 poäng)** Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett ändligtdimensionellt inre produktrum och låt β vara en ON-bas för V. Ange en sats som beskriver huruvida T är normal med hjälp av basen β.

   (c) **(3 poäng)** Betrakta $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ med den inre produkten $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^*A)$. Låt T vara den operator på $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ som ges av
   $$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c+d & c+d \\ d & 0 \end{pmatrix}.$$
   Avgör om T är diagonaliserbar relativt en ON-bas för $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

   Ledning: Det är tillåtet att utan bevis använda att
   $$\beta = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$
   är en ON-bas för $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ i förhållande till denna inre produkt.

4. (a) **(1 poäng)** Låt $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Ange definitionen av att A är en *ortogonal* matris.
   (b) **(4 poäng)** Finn en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 4}(\mathbb{R}).$$

5. (a) **(1 poäng)** Låt $\mathbb{F}$ vara en kropp. Ange definitionen av en *kvadratisk form* på ett $\mathbb{F}$-vektorrum V.
   (b) **(4 poäng)** Diagonalisera den kvadratiska formen $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ som ges av

$$K(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_3^2,$$

   dvs finn en ordnad bas β för $\mathbb{R}^3$ sådan att den associerade matrisrepresentationen av K är diagonal. Ange även uttrycket för den kvadratiska formen i β-koordinater.

6. (a) **(2 poäng)** Låt $\mathbb{F}$ vara en kropp, $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ en matris och λ ett egenvärde av A. Ange definitionerna av den *algebraiska* respektive *geometriska* multipliciteten av λ.
   (b) **(3 poäng)** Visa att egenvärdena till A är precis lika med rötterna av dess karaktäristiska polynom.

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en elektronisk kopia av tentan beställas från studentexpeditionen genom länken https://survey.su.se/Survey/44514/sv.