**Lösningsförslag** (obs: det kan finna många andra sätt att resonera på!)

1. (a) En sats från kursen säger att lösningarna till en diofantisk ekvation $ax + by = c$, där $a, b, c \in \mathbb{Z}$ och $\text{sgd}(a, b) = 1$, ges av

$$\begin{cases} x &= x_0 - bk \\ y &= y_0 + ak \end{cases} \quad \text{för } k \in \mathbb{Z},$$

där $(x_0, y_0)$ är en partikulärlösning till ekvationen. För vår ekvation har vi att $\text{sgd}(8, 13) = 1$ (eftersom 13 är ett primtal, t.ex.) och vi kan därmed tillämpa satsen. För att svara på frågan räcker det därmed att hitta en partikulärlösning $(x_0, y_0)$ till ekvationen, dvs ett par heltal som uppfyller $8x_0 + 13y_0 = 4$. För att hitta sådana tal kan vi t.ex. utföra Euklides algoritm på talen 13 och 8 och läsa resultatet baklänges för att komma fram till uttrycket $2 = 2 \cdot 13 - 3 \cdot 8$, vilket ger $4 = 4 \cdot 13 - 6 \cdot 8$. Alltså är $(x_0, y_0) = (-6, 4)$ en partikulärlösning, vilket enligt ovan sats ger den allmänna lösningen

**Svar:** $$\begin{cases} x &= -6 - 13k \\ y &= 4 + 8k \end{cases} \quad \text{för } k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Om $(x, y)$ är den lösning som motsvarar heltalet $k$ från svaret till del (a), så har vi

$$|x| + |y| = |-6 - 13k| + |4 + 8k| = |6 + 13k| + |4 + 8k|. \qquad (\star)$$

Alltså behöver vi bestämma det $k \in \mathbb{Z}$ som gör detta uttryck så litet som möjligt, vilket vi gör genom att analysera olika fall:
För $k = 0$, motsvarande $(x, y) = (-6, 4)$, så är $(\star) = 10$.
För $k \geq 1$ så är

$$(\star) = 6 + 13k + 4 + 8k \geq 31$$

och för $k \leq -1$ så är

$$(\star) = -6 - 13k - 4 - 8k = -10 - 21k \geq 11.$$

**Svar:** Det minsta värdet (10) antas för lösningen $(x, y) = (-6, 4)$.

(c) Talet 107 i vänsterledet är ett primtal: det är varken delbart med 2, 3, 5 eller 7, och det finns inga andra primtal mindre än $\sqrt{107}$. Faktoriseringen i högerledet ger en primtalsfaktorisering av högerledet där alla primtalsfaktorer är strängt mindre än 107. Enligt aritmetikens fundamentalsats kan de två leden alltså inte vara lika.
(Obs: det finns många sätt att resonera på här.)

2. (a) Per definition har vi att

$$p(x) = (x^2 + 1)k(x) + (2x + 5)$$

för något polynom $k(x)$. Insättning ger därmed

$$p(i) = (i^2 + 1)k(i) + (2i + 5) = 0 + (2i + 5) = 2i + 5.$$

(b) Vi skriver det komplexa talet $z - i$ på polär form: $z - i = re^{i\theta}$ där $r \geq 0$ och $\theta \in \mathbb{R}$. Talet $z$ uppfyller alltså $(z - i)^4 = 16i$ om och endast om

$$\begin{aligned} &\left(re^{i\theta}\right)^4 = 16i \\ \iff\ & r^4 e^{i4\theta} = 2^4 e^{i\pi/2} \\ \iff\ & r = 2 \text{ och } 4\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ för } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Den sista ekvationen är ekvivalent med

$$\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k.$$

Eftersom funktionen $e^{ix}$ är $2\pi$-periodisk så räcker det att ta $k = 0, 1, 2, 3$ i detta uttryck, vilket leder till de fyra vinklarna

$$\frac{\pi}{8}, \quad \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{8} + \pi, \quad \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}.$$

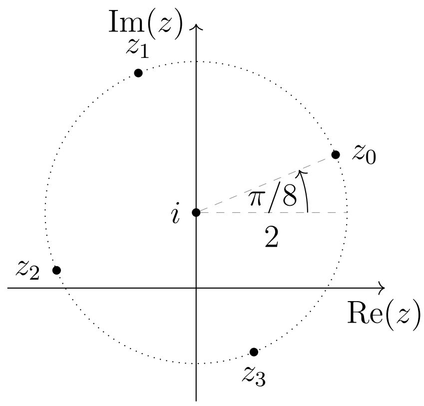
Detta leder till de fyra lösningarna

$$z - i = 2e^{i\theta}$$

för ovan vinklar $\theta$. Med andra ord så är vår ursprungliga ekvation ekvivalent med

$$z \in \left\{ i + 2e^{i\frac{\pi}{8}}, \quad i + 2e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad i + 2e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)}, \quad i + 2e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right)} \right\}.$$

I det komplexa talplanet motsvarar detta följande fyra punkter, som alla ligger på en cirkel med radie 2 och mittpunkt i talet $i$:




Vinkeln mellan närliggande lösningar (relativt mittpunkten $i$) är $\pi/2$.

3. (a) Eftersom den relativa ordningen mellan `X`, `Y` och `Z` är förbestämd, så är det bara deras positioner i ordet som spelar roll. Dessa 3 positioner kan väljas från de 7 möjliga på totalt $\binom{7}{3}$ sätt. För varje av de motsvarande utplaceringarna av dessa 3 symboler så finns det 4! sätt att ordna de resterande symbolerna på, enligt sats från kursen/multiplikationsprincipen. Enligt multiplikationsprincipen, samt formeln för binomialkoefficienter, är det totala antalet ord därmed

$$\textbf{Svar:} \quad \binom{7}{3} \cdot 4! = \frac{7!}{3!4!} \cdot 4! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840.$$

   (b) Vi faktoriserar uttrycket och använder binomialsatsen:

$$\left(x + 2x^2\right)^8 = x^8 \left(1 + 2x\right)^8 = x^8 \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (2x)^k = x^8 \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} 2^k x^k.$$

   Termen $x^{11}$ motsvarar termen $k = 3$ i summan, vilket ger oss koefficienten

$$\textbf{Svar:} \quad \binom{8}{3} 2^3 \quad (= 448).$$

4. (a) Vi bildar systemets utökade matris och använder Gausseliminering:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 11 \\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -R_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} -R_3 \\ -R_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

   Från den sista matrisen kan vi läsa av att systemet har den unika lösningen

   **Svar:** $(x, y, z) = (1, -1, 2)$.

   (b) Antalet lösningar påverkas inte av vad högerleden är, för detta ekvationssystem. Detta kan ses genom att stegen i Gausselimineringen endast berodde på koefficientmatrisen (dvs inte den utökade delen), och att ekvationssystemet motsvarande den slutgiltiga matrisen uppenbarligen alltid har en lösning, oavsett vad den utökade delen är. (Obs: det finns många sätt att resonera på här.)

(c) Enligt utlärd sats är volymen lika med absolutbeloppet av determinanten av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Enligt en annan sats från kursen vet vi att determinanten inte påverkas av att vi adderar en multipel av en rad till en multipel av en annan. Alltså har denna matris samma determinant som den reducerade matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

från ovan, vars determinant är $1 \cdot 2 \cdot 3$ eftersom den är triangulär.

**Svar:** Parallellepipeden har volym 6.

5. Den närmaste punkten $P$ på planet till punkten $Q$ har egenskapen att vektorn $\overrightarrow{PQ}$ är parallell med normalvektorn $\vec{n} = (1, -2, 2)$ till planet. Ett sätt att hitta denna vektor $\overrightarrow{PQ}$ på är genom att ta en godtycklig punkt $P_0$ på planet och projicera $\overrightarrow{P_0Q}$ på normalvektorn $\vec{n}$. Vi väljer $P_0 = (3, 0, 0)$ som vår punkt på planet, vilket ger

$$\overrightarrow{P_0Q} = (5, 6, 3) - (3, 0, 0) = (2, 6, 3),$$

och vi får därmed

$$\overrightarrow{PQ} = \operatorname{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_0Q} = \left( \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0Q}}{|\vec{n}|^2} \right) \vec{n} = \frac{(1, -2, 2) \cdot (2, 6, 3)}{1^2 + 2^2 + 2^2}(1, -2, 2) = -\tfrac{4}{9}(1, -2, 2).$$

Avståndet mellan $P$ och $Q$ är längden på denna vektor:

$$|-\tfrac{4}{9}(1, -2, 2)| = \tfrac{4}{9}\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \tfrac{4}{3}.$$

Vi kan hitta koordinaterna för $P$ genom att använda koordinaterna för $\overrightarrow{PQ}$ och $Q$:

$$\text{koordinaterna för } P = (5, 6, 3) - (-\tfrac{4}{9})(1, -2, 2) = \tfrac{1}{9}(49, 46, 35).$$

**Svar:** Avstånd $\frac{4}{3}$, koordinater $\frac{1}{9}(49, 46, 35)$.

6. Vi betecknar den första rotationen $R_z$, speglingen $S$, och den sista rotationen $R_x$, så att $T = R_x \circ S \circ R_z$. För att hitta matrisen för $T$ relativt standardbasen använder vi faktumet att matrisen för en linjär avbildning $F$, relativt (standard-)basen $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, är

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ [F(\overrightarrow{e_1})]_B & [F(\overrightarrow{e_2})]_B & [F(\overrightarrow{e_3})]_B \\ | & | & | \end{pmatrix},$$

där $[\overrightarrow{u}]_B$ står för $B$-koordinatvektorn av $\overrightarrow{u}$.

Geometriskt kan vi se att

$$\begin{aligned} R_z(\overrightarrow{e_1}) &= \overrightarrow{e_2}, & R_z(\overrightarrow{e_2}) &= -\overrightarrow{e_1}, & R_z(\overrightarrow{e_3}) &= \overrightarrow{e_3}, \\ S(\overrightarrow{e_1}) &= \overrightarrow{e_1}, & S(\overrightarrow{e_2}) &= \overrightarrow{e_3}, & S(\overrightarrow{e_3}) &= \overrightarrow{e_2}, \\ R_x(\overrightarrow{e_1}) &= \overrightarrow{e_1}, & R_x(\overrightarrow{e_2}) &= \overrightarrow{e_3}, & R_x(\overrightarrow{e_3}) &= -\overrightarrow{e_2}. \end{aligned}$$

Tillsammans med linjäriteten hos $S$ och $R_x$, vilket medför t.ex. att $S(-\overrightarrow{u}) = -S(\overrightarrow{u})$, ger detta

$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{e_1}) &= R_x(S(R_z(\overrightarrow{e_1}))) = R_x(S(\overrightarrow{e_2})) = R_x(\overrightarrow{e_3}) = -\overrightarrow{e_2} \\ T(\overrightarrow{e_2}) &= R_x(S(R_z(\overrightarrow{e_2}))) = R_x(S(-\overrightarrow{e_1})) = R_x(-\overrightarrow{e_1}) = -\overrightarrow{e_1} \\ T(\overrightarrow{e_3}) &= R_x(S(R_z(\overrightarrow{e_3}))) = R_x(S(\overrightarrow{e_3})) = R_x(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_3}. \end{aligned}$$

I standardbasen har dessa vektorer koordinater

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Därmed är matrisen för $T$ relativt standardbasen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Effekten av $T$ är alltså densamma som effekten av att spegla i planet $x + y = 0$ (eftersom båda transformationerna har samma effekt på basvektorerna).

[Obs: denna uppgift kan också lämpligen lösas genom att beräkna matriserna (relativt standardbasen) för var och en av transformationerna $R_z$, $S$ och $R_x$, och multiplicera ihop dem i lämplig ordning.]