Läsuppgifter Lösningar

Ludvig Olsson

December 26, 2022

B6

(a)
Skillnaden på området i (a) och området i (b) är ett nollrum, så svaret på (a) och (b) är samma.

(b)
Området D_b är symmetrisk i x, (om $(x,y) \in D_b$ så är $(-x,y) \in D_b$ och funktionen $y \sin x^9$ är udda i x $(y \sin(-x)^9 = -y \sin x^9)$. De här två sakerna tillsammans innebär att

$$\iint_{D_b} y \sin x^9 dxdy = 0.$$

Alltså får vi

$$\iint_{D_b} x^2 y + y \sin x^9 dxdy = \iint_{D_a} x^2 y dxdy.$$

Gränser för D_a ges av $0 < y \leq \sqrt{2 - x^2}$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Vi får

$$\iint_{D_b} x^2 y dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x^2 y dydx$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 \int_0^{\sqrt{2-x^2}} ydydx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2-x^2}} dydx$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 \frac{2 - x^2}{2} dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 - \frac{x^4}{2} dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^3}{3} - \frac{(\sqrt{2})^5}{10} - \frac{(-\sqrt{2})^3}{3} + \frac{(-\sqrt{2})^5}{10}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{10} = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

(c)
En begränsad kvadrerbar mängd ges av $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}$, randen ges av en kvadrat som är ett nollrum.

En obegränsad kvadrerbar mängd ges av $\mathbb{R}^2$, den här mängden har ingen rand och den tomma mängden är definitivt ett nollrum.

En obegränsad mängd som inte är kvadrerbar ges av $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, alltså övre halvplanet. Randen är linjen $y = 0$ som inte kan täckas med ett ändligt antal rektanglar.

En begränsad mängd som inte är kvadrerbar ges av $M = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x, y \in \mathbb{Q}\}$, alltså element i $[0, 1] \times [0, 1]$ med rationella koordinater. För varje punkt i $[0, 1] \times [0, 1]$ finns en punkt med rationella punkter godtyckligt nära och en punkt med irrationella koordinater godtyckligt nära, så randen till M är $[0, 1] \times [0, 1]$, vilket inte är en nollmängd.

B7

(a)

Vi integrerar över området $0 \leq x \leq 1$, $\sqrt{x} \leq y \leq 1$. Den andra olikheten ger $0 \leq x \leq y^2$, så vi kan skriva om våra gränser till $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq y^2$. Alltså gäller

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sin(\pi y^4) dy dx = \int_0^1 \int_0^{y^2} \sin(\pi y^3) dx dy$$
$$= \int_0^1 \left[x \sin(\pi y^3)\right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 y^2 \sin(\pi y^3) dy.$$

Vi gör substitutionen $u = y^3$, så att $\frac{du}{dy} = 3y^2$ och $du = 3y^2 dy$. Alltså gäller

$$\int_0^1 y^2 \sin(\pi y^3) dy = \int_0^1 \frac{\sin(\pi u)}{3} du = \left[-\frac{\cos(\pi u)}{3\pi}\right]_0^1$$
$$= -\frac{\cos(\pi)}{3\pi} + \frac{\cos(0)}{3\pi} = \frac{2}{3\pi}.$$

(b)

Funktionen $\sin(x)$ är icke-negativ för $0 \leq x \leq \pi$. Alltså är $\sin(\pi y^4)$ icke negativ för $0 \leq y \leq$. Alltså är vår integrand icke-negativ över området vi integrerar över.

Betrakta punkten $(1/2, 1/\sqrt[4]{2})$. Den ligger på insidan av vårt område och om $(x, y) = (1/2, 1/\sqrt[4]{2})$ så gäller $\sin(\pi y^4) = \sin(\pi/2) = 1$. Eftersom $\sin(\pi y^4)$ är kontinuerlig finns det en cirkelskiva D kring $(1/2, 1/\sqrt[4]{2})$ och inuti vårt område så att $\sin(\pi y^4) \geq 1/2$ för $(x, y) \in D$. Alltså gäller

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sin(\pi y^4) dy dx \geq \iint_D \sin(\pi y^4) dy dx \geq \iint_D \frac{1}{2} dy dx = \mu(D)\frac{1}{2} > 0.$$

B8

(a)

Vi gör en substitution i den första integralen och sätter $v = 2y$ och $u = x/2$. Vi har att

$$\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \iff 1 \leq y \leq 2 \iff 1 \leq v \leq 2,$$

$$\frac{\pi}{y} \leq x \leq 2\pi \iff \frac{\pi}{2y} \leq \frac{x}{2} \leq \pi \iff \frac{\pi}{v} \leq u \leq \pi.$$

Vi får också Jacobian

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 1.$$

Alltså får vi

$$\int_{1/2}^{1} \int_{\pi/y}^{2\pi} \sin(xy) dx dy = \int_{1}^{2} \int_{\pi/v}^{\pi} \sin(uv) du dv.$$

Vi kan också byta namn på variablerna i den andra integralen

$$= \int_{1}^{2} \int_{\pi}^{2\pi/y} \sin(xy) dx dy = \int_{1}^{2} \int_{\pi}^{2\pi/v} \sin(uv) du dv.$$

Tillsammans får vi

$$\int_{1/2}^{1} \int_{\pi/y}^{2\pi} \sin(xy) dx dy + \int_{1}^{2} \int_{\pi}^{2\pi/y} \sin(xy) dx dy$$

$$= \int_{1}^{2} \int_{\pi/v}^{\pi} \sin(uv) du dv + \int_{1}^{2} \int_{\pi}^{2\pi/v} \sin(uv) du dv$$

$$= \int_{1}^{2} \left(\int_{\pi/v}^{\pi} \sin(uv) du + \int_{\pi}^{2\pi/v} \sin(uv) du \right) dv = \int_{1}^{2} \int_{\pi/v}^{2\pi/v} \sin(uv) du dv$$

$$= \int_{1}^{2} \int_{\pi/v}^{2\pi/v} \sin(uv) du dv = \int_{1}^{2} \left[-\frac{\cos(uv)}{v} \right]_{\pi/v}^{2\pi/v} dv =$$

$$\int_{1}^{2} -\frac{\cos(2\pi)}{v} + -\frac{\cos(\pi)}{v} dv = \int_{1}^{2} -\frac{2}{v} dv = -2\ln(2).$$

B9

(a)

Enligt extremvärdessatsen antar f sitt minimum och maximum på D. Alltså finns $(x_0, y_0) \in D$ och $(x_1, y_1) \in D$ så att för alla $(x, y) \in D$ så gäller

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1).$$

Vi får

$$\iint_D f(x,y) dx dy \leq \iint_D f(x_1, y_1) dx dy = f(x_1, y_1) \iint_D 1 dx dy = f(x_1, y_1)\mu(D).$$

På samma sätt gäller

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq f(x_0,y_0)\mu(D).$$

Om vi lägger ihop de två olikheterna får vi

$$f(x_0,y_0) \leq \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y)dxdy \leq f(x_1,y_1).$$

Enligt mellanliggande-värdessatsen måste det finnas $(\xi,\eta) \in D$ så att

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y)dxdy \iff \iint_D f(x,y)dxdy = \mu(D)f(\xi,\eta).$$

(b)
Enligt del (b) med $D = B_r(a,b)$ och $f = g$ så finns $(\xi(r),\eta(r)) \in B_r(a,b)$ så att

$$\iint_{B_r(a,b)} g(x,y)dxdy = \mu(B_r(a,b))g(\xi(r),\eta(r)) = \pi r^2 g(\xi(r),\eta(r)).$$

Vi får alltså

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \iint_{B_r(a,b)} g(x,y)dxdy = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2}\pi r^2 g(\xi(r),\eta(r)) = \pi g(a,b).$$

Vi får sista likheten genom att notera att $(\xi(r),\eta(r)) \in B_r(a,b)$, så att $\lim_{r\to 0}(\xi(r),\eta(r)) = (a,b)$, och g är kontinuerlig.

B10

(a)
Vi noterar att om $-2+x^2 \leq y \leq 2-x^2$ så måste $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Vi får alltså integralen

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-2+x^2}^{2-x^2} 1dydx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [y]_{-2+x^2}^{2-x^2}dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [y]_{-2+x^2}^{2-x^2}dx$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4-2x^2dx = \left[4x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

(b)
Vi har att

$$vol(K) = \iint_D \int_0^{1+|xy|} 1dzdxdy = \iint_D (1+|xy|)dxdy$$

$$= \iint_D 1dxdy + \iint_D |xy|dxdy = \mu(D) + \iint_D |xy|dxdy.$$

Vi vet från (a) att $\mu(D) = \frac{16\sqrt{2}}{3}$, så det räcker att räkna ut integralen över $|xy|$. Funktionen $|xy|$ är jämn i x och y och området D är symmetriskt i x och y-axeln så vi får

$$\int_D |xy|dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-2+x^2}^{2-x^2} |xy|dxdy = 4\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2-x^2} |xy|dxdy = 4\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2-x^2} xydydx$$

$$= 4\int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{2-x^2} = 4\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x(2-x^2)^2}{2}dx = 4\left[\frac{x^6}{12} - \frac{x^4}{2} + x^2\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{32}{12} - \frac{16}{2} + 8 = \frac{8}{3}.$$

Alltså gäller

$$vol(K) = \frac{16\sqrt{2}}{3} + \frac{8}{3}.$$

(c)
Vi har att

$$\iint_D (1+xy)dxdy = \iint_D 1dxdy + \iint_D xydxdy = \mu(D) + \iint_D xydxdy.$$

Funktionen xy är udda i x och D är symmetriskt i y-axeln. Vi får

$$\iint_D xydxdy = 0.$$

Alltså gäller

$$\iint_D (1+xy)dxdy = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

B15 Området i uppgiften består av 4 områden D_1, D_2, D_3, D_4 i de 4 olika kvadranterna (se bild). Eftersom integranden $x^4 - y^4$ är jämn i x och y och vårt område D är symmetriskt i x-axeln och y-axeln får vi att

$$\iint_D x^4 - y^4 dxdy = 4\iint_{D_1} x^4 - y^4 dxdy.$$

Vi räknar därmed ut integralen över D_1 istället för D.

Vi har en faktorisering

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

så vi kan gör substitutionen $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$. Notera att vi använder att funktionen $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ är injektiv i första kvadranten, men inte nödvändigtvis annars. Vi får därmed nya gränser $3 \leq u \leq 4$, $1 \leq v \leq 2$. Vi har Jacobian

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix} = -8xy.$$

Absolutbeloppet blir $8xy$ eftersom både x och y är icke-negativa på D_1. Vi har att

$$u^2 - v^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = 4x^2y^2.$$

Det innebär att $4\sqrt{u^2 - v^2} = 8xy$. Alltså får vi

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|^{-1} = \frac{1}{8xy} = \frac{(u^2 - v^2)^{-1/2}}{4}.$$

$$\iint_{D_1} x^4 - y^4 dxdy = \int_1^2 \int_3^4 uv \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv = \int_1^2 \int_3^4 \frac{1}{4} uv(u^2 - v^2)^{-1/2} dudv.$$

En primitiv funktion till $x(x^2 - a^2)^{-1/2}$ ges av $(x^2 - a^2)^{1/2}$, så vi har

$$\int_1^2 \int_3^4 \frac{1}{4} uv(u^2 - v^2)^{-1/2} dudv = \frac{1}{4} \int_1^2 v \left[(u^2 - v^2)^{1/2}\right]_3^4 dudv$$

$$= \frac{1}{4} \int_1^2 v(16 - v^2)^{1/2} - v(9 - v^2)^{1/2} dv.$$

En primitiv till $x(c - x^2)^{1/2}$ ges av $\frac{1}{3}(c - x^2)^{3/2}$. Vi får

$$\frac{1}{4} \int_1^2 v(16 - v^2)^{1/2} - v(9 - v^2)^{1/2} dv = \frac{1}{4} \left[\frac{(16 - v^2)^{3/2}}{3} - \frac{(9 - v^2)^{3/2}}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{12}((12)^{3/2} - (5)^{3/2} - (15)^{3/2} + (8)^{3/2}).$$

Slutgiltigen får vi

$$\iint_D x^4 - y^4 dxdy = 4 \iint_{D_1} x^4 - y^4 dxdy = \frac{1}{3}((12)^{3/2} - (5)^{3/2} - (15)^{3/2} + (8)^{3/2}).$$

B16

(a)

Om vi gör variabelbytet $x = 2r\cos(\theta)$ och $y = r\sin(\theta)$ så får vi Jacobian

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = 2r.$$

Begränsningen $x^2 + 4y^2 \leq 4$ blir $r^2 \leq 1$ och $x \geq 0$ blir $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Tillsammans får vi

$$\iint_D x dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 4r^2 \cos(\theta) dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) d\theta \int_0^1 4r^2 dr$$

$$= [\sin(\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{4r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}.$$

(b)
Vi antar här att $a, b > 0$ eftersom det inte påverkar uppgiften.

Vi gör variabelbytet $x = a\cos(\theta)$ och $y = b\sin(\theta)$. Vår Jacobian blir

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = abr.$$

Olikheten $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ blir $r^2 \leq 1$. Olikheten $x \geq 0$ blir $-\pi/2 \leq 0 \leq \pi/2$. Vi får

$$\iint_D x dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 a^2 br^2 \cos(\theta) dr d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta \int_0^1 a^2 br^2 dr = [\sin(\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{a^2 br^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2a^2 b}{3}.$$

(c)
Låt D vara ellipsen i uppgiften. Vi gör samma substitution som i (b), men får istället gränsen $0 \leq \theta \leq 2\pi$ för θ. Vi får

$$Area(D) = \iint_D 1 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abr dr = [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{abr^2}{2}\right]_0^1 = \pi ab.$$

B17
Från olikheten $y < x^2 < 2y$ får vi $y < 2y$ vilket ger $y > 0$. På samma sätt gäller $x > 0$. Gränserna kan ekvivalent skrivas $1 < \frac{x^2}{y} < 2$ och $1 < \frac{y^2}{x} < 2$. Vi vill utför variabelbytet $u = \frac{x^2}{y}$ och $v = \frac{y^2}{x}$. För att vara säkra på att det är tillåtet visar vi att $F(x,y) = (x^2/y, y^2/x)$ är en bijektion från D till

$$E = \{(u,v) : 1 < u < 2, 1 < v < 2\}.$$

Det gör vi genom att definiera

$$G(u,v) = (\sqrt[3]{u^2 v}, \sqrt[3]{uv^2}).$$

Vi får att $F \circ G(u,v) = (u,v)$ och att $G \circ F(x,y) = (x,y)$, alltså har F en invers och är därmed bijektiv.

Vi utför variabelbytet, så vi får gränser $1 < u < 2$ och $1 < v < 2$ för u och v. Vi får Jacobian

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{bmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{3}.$$

Därmed gäller

$$\iint_D \sqrt{\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}} dxdy = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{3}\sqrt{u+v}dudv$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 \left[\frac{2(u+v)^{3/2}}{3}\right]_1^2 dv = \frac{2}{9}\int_1^2 (2+v)^{3/2} - (1+v)^{3/2} dv = \frac{2}{9}\left[\frac{2(2+v)^{5/2}}{5} - \frac{2(1+v)^{5/2}}{5}\right]_1^2$$

$$= \frac{4}{45}(4^{5/2} - 3^{5/2} - 3^{5/2} + 2^{5/2}) = \frac{8}{45}(32 - 9\sqrt{3} + 2\sqrt{2}).$$

B19

Två sammanhängande områden begränsas av de fyra kurvorna (se bild) varav en av dem (D) ligger i första kvadranten. Olikheter till D ges av $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, $0 \leq y - x^2 \leq 1$, $x \geq 0$.

Vi vill utföra variabelbytet $u = x^2 + y^2, v = y - x^2$, vilket kommer att vara ett väldefinierat variabelbyte i första kvadranten. Vi får Jacobian

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -2x & 1 \end{bmatrix} = 2x(2y+1).$$

Vi har även att $|2x(2y+1)| = 2x(2y+1)$ eftersom $x, y \geq 0$ på D. Våra nya gränser ges av $1 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 1$. Vi behöver också lösa ut y för att utföra våra beräkningar, så vi får

$$u + v = y^2 + y \Rightarrow y^2 + y - (u+v) = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + u + v}$$

$$\Rightarrow 2y = -1 + \sqrt{1 + 4u + 4v} \Rightarrow 2y + 1 = \sqrt{1 + 4u + 4v}.$$

Vi kan nu utföra vårt variabelbyte.

$$\iint_D xydxdy = \iint_D \frac{xy}{2x(2y-1)} 2x(2y-1)dxdy = \iint_D \frac{y}{2(2y-1)} 2x(2y+1)dxdy$$

$$= \iint_D \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{(2y+1)}\right)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dxdy = \frac{1}{4}\int_1^2 \int_0^1 (1 - (1 + 4v + 4u)^{-1/2})dvdu.$$

Nu återstår bara att integrera

$$\frac{1}{4}\int_1^2\int_0^1 (1-(1+4v+4u)^{-1/2})dvdu = \frac{1}{4}\int_1^2 \left[v - \frac{(1+4v+4u)^{1/2}}{2}\right]_0^1 du$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^2 1 - \frac{(5+4u)^{1/2}}{2} + \frac{(1+4u)^{1/2}}{2} du = \frac{1}{4}\left[u - \frac{(5+4u)^{3/2}}{12} + \frac{(1+4u)^{3/2}}{12}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{48}(12 - 13^{3/2} + 9^{3/2} + 9^{3/2} - 5^{3/2}) = \frac{66 - 13\sqrt{13} - 5\sqrt{5}}{48}.$$

B25 Vi låter $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2y : x^2 + 4y^2 \leq 4a^2$. Då är D_a ett kompakt område som närmar sig D, så vi får per definition

$$\iint_D e^{-x^2-4y^2} dxdy = \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-x^2-4y^2} dxdy.$$

Vi gör variabelbytet $x = 2r\cos(\theta)$ och $y = r\sin(\theta)$. Jacobianen blir 2r. Olikheten $x^2 + 4y^2 \leq 4a^2$ blir $r \leq a$, och olikheten $0 \leq x \leq 2y$ blir

$$0 \leq 2r\cos(\theta) \leq 2r\sin(\theta) \iff 0 \leq \cos(\theta) \leq \sin(\theta) \iff 0 \leq \theta \leq \pi/4.$$

Alltså får vi

$$\iint_{D_a} e^{-x^2-4y^2} dxdy = \int_0^{\pi/4}\int_0^a 2re^{-4r^2} drd\theta = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^a 2re^{-4r^2} dr$$

$$= [\theta]_0^{\pi/4} \left[-\frac{e^{-4r^2}}{4}\right]_0^a = \frac{\pi}{16}(1 - e^{-4a^2}).$$

Slutgiltigen får vi

$$\iint_D e^{-x^2-4y^2} dxdy = \lim_{a\to\infty} \iint_{D_a} e^{-x^2-4y^2} dxdy = \lim_{a\to\infty} \frac{\pi}{16}(1 - e^{-4a^2}) = \frac{\pi}{16}.$$

B26

(a)
Integralen konvergerar över D om och endast om den konvergerar över $D' = \{(x,y) \in D : x^2 + y^2 \geq 1$. Vi har att

$$\iint_{D'} \frac{1}{1 + x^3 + y^3} dxdy \leq \iint_{D'} \frac{1}{x^3 + y^3} dxdy.$$

Vi byter till polära koordinater. Att vi ligger i första kvadranten ger oss $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Begränsingar på D' är $1 \leq r < \infty$. Vi får

$$\iint_{D'} \frac{1}{x^3 + y^3} dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_1^\infty \frac{r}{r^3(\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta))} drd\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)} d\theta \int_1^{\infty} \frac{1}{r^2} dr.$$

Den första integralen är en ändlig integral, och den andra konvergerar.

(b)
Vi integrerar återigen över D'. Eftersom integranden inte nödvändigtvis är positiv, använder vi kravet för absolut konvergens.

$$\iint_{D'} \frac{|1-x-y|}{1+(x^2+y^2)^4} dxdy \leq \iint_{D'} \frac{1+x+y}{1+(x^2+y^2)^4} dxdy \leq \iint_{D'} \frac{2(x+y)}{(x^2+y^2)^4} dxdy.$$

Vi byter till polära koordinater och får

$$\iint_{D'} \frac{2(x+y)}{(x^2+y^2)^4} dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_1^{\infty} \frac{1}{r^6} \frac{2(\cos(\theta)+\sin(\theta))}{(\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2)^4} drd\theta,$$

$$\int_0^{\pi/2} 2(\cos(\theta)+\sin(\theta)) d\theta \int_1^{\infty} \frac{1}{r^6} dr.$$

Den första integralen är ändlig och den andra konvergerar. Alltså konvergerar vår ursprungliga integral.

B27
Vi har $0 \leq x \leq \infty$ som gränser för x, och $-e^{-x} \leq y \leq e^{-x}$ som gränser för y. Om $\alpha \neq 1$ får vi

$$\iint_D e^{\alpha x} dxdy = \int_0^{\infty} \int_{-e^{-x}}^{e^{-x}} e^{\alpha x} dydx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{\alpha x} [y]_{-e^{-x}}^{e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} 2e^{\alpha x}(e^{-x})$$

$$= \int_0^{\infty} 2e^{(\alpha-1)x} dx = 2\left[\frac{e^{(\alpha-1)x}}{\alpha-1}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{\alpha-1}(1 - \lim_{x\to\infty} e^{(\alpha-1)x}).$$

Det sista gränsvärdet finns om och endast om $\alpha < 1$ och är 0 i de fallen, så

$$\iint_D e^{\alpha x} dxdy = \frac{2}{\alpha-1}.$$

Om $\alpha = 1$ blir integralen istället

$$\int_0^{\infty} 2dx$$

vilket uppenbarligen divergerar.

B36

Vi låter z vara oberoende, y bero på z och x bero på y och z. Olikheten $0 \leq x \leq y+z \leq z \leq 1$ ger oss $0 \leq z \leq 1$. Olikheten $0 \leq y+z \leq z$ kan skrivas om som $-z \leq y \leq 0$ vilket blir våra gränser för y. Olikheten $0 \leq x \leq y+z$ blir våra gränser för x. Tillsammans ger det

$$\iiint_D x^2yzdxdydz = \int_0^1 \int_{-z}^0 \int_0^{y+z} x^2yzdxdydz$$

$$= \int_0^1 \int_{-z}^0 \left[\frac{x^3yz}{3}\right]_0^{y+z} dydz = \frac{1}{3}\int_0^1 \int_{-z}^0 (y+z)^3yzdydz$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 z \int_{-z}^0 y^4+3y^3z+3y^2z^2+yz^3dydz = \frac{1}{3}\int_0^1 \left[\frac{y^5}{5}+\frac{3y^4z}{4}+y^3z^2+\frac{y^2z^3}{2}\right]_{-z}^0$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 z^5\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{4}+1-\frac{1}{2}\right)dz = \frac{1}{3}\int_0^1 -\frac{z^5}{20}dz$$

$$= -\frac{1}{20}\left[\frac{z^6}{6}\right]_0^1 = -\frac{1}{120}.$$

B37

(a)

Vi skriver om ekvation som begränsar området som

$$\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Vi ser att vi kan göra substitutionen $x = 3(r\cos\varphi\sin\theta)+2$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$. Här låter vi $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Vi får Jacobian

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = 3r^2\sin\theta.$$

Vårt nya område blir $r^2 \leq 1$, och $3r\cos\varphi\sin\theta + 2 \leq 2$. Eftersom $\sin\theta \geq 0$ för $0 \leq \theta \leq \pi$ och $r \geq 0$ blir den andra olikheten ekvivalent med

$$\cos\varphi \leq 0.$$

Det här gäller för $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$. Alltså får vi integralen

$$\iiint_D xdxdydz = \int_0^1 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^\pi (3r\cos\varphi\sin\theta+2)\cdot 3r^2\sin(\theta)d\theta d\varphi dr$$

$$= 9\int_0^1 r^3 \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos\varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta + 6\int_0^1 r^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta.$$

Vi räknar ut integralerna var för sig. Den första integralen blir

$$9\int_0^1 r^3 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = 9\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 [\sin(\varphi)]_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))d\theta$$

$$= -\frac{9}{4}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^\pi = -\frac{9\pi}{4}.$$

Den andra integralen blir

$$6\int_0^1 r^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 6\left[\frac{r^3}{3}\right][\varphi]_{\pi/2}^{3\pi/2}[-\cos(\theta)]_0^\pi = 4\pi.$$

Totalt får vi alltså

$$-\frac{9\pi}{4} + 4\pi = \frac{7\pi}{4}.$$

(b)
Funktionen $y\sin(y^{104})$ är udda i y ($-y\sin((-y)^{104}) = -y\sin(y^{104})$. Området D är symmetriskt i x-axeln. Alltså är integralen 0.

B39

(a)
Integralen konvergerar om och endast om den konvergerar på området $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ eftersom $\mathbb{R}^3 - D$ är begränsat. Vi har

$$\iiint_D \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} \geq \iiint_D \frac{1}{2(x^2+y^2+z^2)} = \int_1^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2r^2} r^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta.$$

Två av integralerna är ändliga och den sista divergerar.

(b)
Vi byter till polära koordinater

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} dxdydz = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^2\sin(\theta)}{(1+r^2)^2} d\theta d\varphi dr$$

$$= \int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r^2)^2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta dr = \int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r^2)^2} dr [\varphi]_0^{2\pi}[-\cos(\theta)]_0^\pi$$

$$= \int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r^2)^2} dr 4\pi.$$

En primitiv till $r/(1+r^2)^2$ ges av $-1/(2(r^2+1))$. Vi utför partiell integration och får

$$\int \frac{r^2}{(1+r^2)^2} dr = \int r \cdot \frac{r}{(1+r^2)^2} dr = -\frac{r}{2(r^2+1)} + \int \frac{1}{2(1+r^2)} dr$$
$$= -\frac{r}{2(r^2+1)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(r).$$

Alltså får vi

$$\int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r^2)^2} dr 4\pi = 4\pi \left[-\frac{r}{2(r^2+1)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(r) \right]_0^\infty$$
$$= 4\pi \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2}\tan^{-1} r = \pi^2.$$

B40

Anta först att $\beta \geq 0$. Vi integrerar över området $D' = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \geq 1, y > 0\}$ eftersom vår ursprungliga integral konvergerar om och endast om integralen över D' konvergerar. Vi får

$$\iiint_{D'} \frac{|x|^\alpha}{2|x|^\beta} dxdydz \leq \iiint_{D'} \frac{|x|^\alpha}{1+|x|^\beta} dxdydz \leq \iiint_{D'} \frac{|x|^\alpha}{|x|^\beta} dxdydz.$$

Alltså räcker det att tå reda på när integralen till höger konvergerar. Vi byter till polära koordinater och får

$$\iiint_{D'} \frac{|x|^\alpha}{|x|^\beta} = \int_1^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r^\alpha}{r^\beta} \sin(\theta) d\theta d\varphi dr$$
$$= \int_1^\infty r^{\alpha-\beta+2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta.$$

Integralen som innehåller r konvergerar om och endast om $\alpha - \beta + 2 \leq -2 \iff \alpha \leq \beta + 4$.

Om istället $\beta < 0$ har vi istället

$$\iiint_{D'} \frac{|x|^\alpha}{2} dxdydz \leq \iiint_{D'} \frac{|x|^\alpha}{1+|x|^\beta} dxdydz \leq \iiint_{D'} |x|^\alpha dxdydz.$$

Det räcker alltså att undersöka integralen till höger. Vi byter till polära koordinater.

$$\iiint_{D'} |x|^\alpha dxdydz = \int_1^\infty r^{\alpha+2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta.$$

Integralen som innehåller r konvergerar om och endast om $\alpha + 2 \leq -2$, alltså $\alpha \leq -4$.

Alltså konvergerar vår ursprungliga integral om och endast om $\beta \geq 0$ och $\alpha \leq \beta - 4$ eller $\beta < 0$ och $\alpha \leq -4$.

B41

Vi delar upp det som

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 - w^2 - z^2$$

och

$$0 \leq w^2 + z^2 \leq 1$$

. Vi får

$$\iiiint_K 1dxdydzdw = \iint_{w^2+z^2 \leq 1} \iint_{x^2+y^2 \leq 1-w^2-z^2} 1dxdydzdw$$

$$\iint_{w^2+z^2 \leq 1} \left(\text{Area av cirkel med radie } 1 - w^2 - z^2\right) dzdw$$

$$\iint_{w^2+z^2 \leq 1} \pi(1 - w^2 - z^2)dzdw.$$

Vi byter till polära koordinater

$$\iint_{w^2+z^2 \leq 1} \pi(1 - w^2 - z^2)dzdw = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \pi(1 - r^2)rdrd\theta$$

$$= 2\pi^2 \int_0^1 r - r^3 dr = 2\pi^2 (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi^2}{2}.$$

B44

(a)
Kurvan är sluten eftersom

$$\gamma(-\pi) = (1 + \cos(-2\pi), \sin(-2\pi), 2\sin(-\pi)) = (2, 0, 0) = \gamma(\pi).$$

Kurvan är däremot inte enkel eftersom

$$\gamma(0) = (1 + \cos(0), \sin(0), 2\sin(0)) = (2, 0, 0) = \gamma(\pi) = \gamma(-\pi).$$

(b)
Vi har att

$$(1 + \cos 2t)^2 + (\sin 2t)^2 + (2\sin t)^2 = 1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t + \sin^2 2t + 4\sin^2 t =$$

$$= 1 + 2\cos 2t + 1 + 4(\frac{1}{2}(1 - \cos(2t)) = 4 - 2\cos 2t - 2\cos 2t = 4.$$

Alltså ligger γ på ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(c)
Vi har att

$$(1 + \cos 2t - 1)^2 + (\sin 2t)^2 = \cos^2 2t + \sin^2 2t = 1.$$

Alltså ligger γ på ytan $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Vi ser att γ ligger på skärningen mellan en cylinder och en sfär där cylindern ”tangerar” sfären. Alltså kommer γ att se ut som en åtta.

B48

Vi skriver $F(x, y) = (6x + 2y^2, 4xy + 3y^2) = (P(x, y), Q(x, y))$.

(a)

Vi introducerar kurvor σ_1 och σ_2 där σ_1 parametriseras av

$$r_1(t) = (t, 0) : \quad -1 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

och σ_2 parametriseras av

$$r_2(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, t\right) : \quad 0 \ \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Om vi orienterar σ_1 och σ_2 negativt får vi att $-\sigma_1 \cup -\sigma_2 \cup \sigma$ är en sluten kurva som innesluter ett kompakt område D. Enligt Greens sats gäller

$$\int_{-\sigma_1 \cup -\sigma_2 \cup \sigma} F \cdot dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$
$$= \iint_D (4y - 4y) dxdy = 0.$$

Vi har också att

$$\int_{-\sigma_1 \cup -\sigma_2 \cup \sigma} F \cdot dr = -\int_{\sigma_1} F \cdot dr - \int_{\sigma_2} F \cdot dr + \int_{\sigma} F \cdot dr.$$

Lägger vi ihop de två senaste likheterna får vi

$$\int_{\sigma} F \cdot dr = \int_{\sigma_1} F \cdot dr + \int_{\sigma_2} F \cdot dr.$$

Vi beräknar först integralen över σ_1. Vi får att $r_1'(t) = (1,0)$.

$$\int_{\sigma_1} F \cdot dr = \int_{-1}^{1/\sqrt{3}} F(r_1(t)) \cdot r_1'(t) dt = \int_{-1}^{1/\sqrt{3}} (6t, 0) \cdot (1,0) dt$$

$$= \int_{-1}^{1/\sqrt{3}} 6t dt = [3t^2]_{-1}^{1/\sqrt{3}} = 1 - 3 = -2.$$

Vi beräknar sedan integralen över σ_2. Vi får att $r_2'(t) = (0,1)$.

$$\int_{\sigma_2} F \cdot dr = \int_0^1 F(r_2(t)) \cdot r_2'(t) dt = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}, \frac{4t}{\sqrt{3}} + 3t^2 \right) \cdot (0,1) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4t}{\sqrt{3}} + 3t^2 \right) dt = \left[\frac{2t^2}{\sqrt{3}} + t^3 \right]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Slutligen får vi

$$\int_\sigma F \cdot dr = \int_{\sigma_1} F \cdot dr + \int_{\sigma_2} F \cdot dr = -2 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(b)

Vi låter σ' vara kurvan i föregående uppgift. Den kombinerade kurvan $\sigma' \cup -\sigma$ är alltså den positivt orienterade randen till ellipsen $x^2 + 4y^2 = 1$, så vi får enligt Greens sats att

$$-\int_\sigma F \cdot dr + \int_{\sigma'} F \cdot dr = \iint_{x^2+2y^2 \leq 1} = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = 0.$$

Alltså är de två integralerna lika, och

$$\int_\sigma F \cdot dr = \int_{\sigma'} F \cdot dr = -2 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(c)

Vi har enligt Greens sats

$$\int_\sigma F \cdot dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = 0.$$

B50
Vi har att $F(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Vi låter $r(t) = (x(t), y(t)), a \leq t \leq b$ vara en parametrisering av Γ. Kurvan Γ ligger på en nivåkurva till f, säg tex $f(x,y) = C$, så $f(r(t)) = C$. Därmed får vi

$$\int_\Gamma F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(r(t))\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(r(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(r(t)) \frac{dy}{dt} dt = \int_a^b \frac{df}{dt}(r(t)) dt.$$

Här använder vi kedjeregeln i flera variabler för sista likheten.

$$\int_a^b \frac{df}{dt}(r(t)) dt = [f(r(t))]_a^b = f(r(b)) - f(r(a)) = C - C = 0.$$

B56
Vi sluter kurvan γ med en kurva $\delta = \{(x,y) : y = x, 0 \leq x \leq 1.\}$ Kurvan δ parametriseras som $r(t) = (t,t), 0 \leq t \leq 1$. Det ger $r'(t) = (1,1)$. Alltså får vi

$$\int_\delta F \cdot dr = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^1 (\sin(t-t), 2t^2 + \sin(t-t)) \cdot (1,1) dt$$

$$= \int_0^1 2t^2 dt = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Kurvan $\delta \cup -\gamma$ är den positivt orienterade randen till området

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

som också kan skrivas

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}.$$

Enligt Greens sats får vi

$$-\int_\gamma F \cdot dr + \int_\delta F \cdot dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_{y^2}^y 2y + \cos(y-x) - \cos(x-y) dx dy = \int_0^1 \int_{y^2}^y 2y dx dy$$

$$\int_0^1 2y[x]_{y^2}^y dx = \int_0^1 2y^2 - 2y^3 dy = \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Lägger vi ihop dessa resultat får vi

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_\delta F \cdot dr - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

B57

(b)
Enligt Greens sats gäller

$$\int_{\partial D} xydx + (x^2 - y^2)dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}[x^2 - y^2] - \frac{\partial}{\partial y}[xy]dxdy = \iint_D xdxdy.$$

Funktionen x är udda i x och D är symmetrisk i y-axeln så integralen blir 0.

B58
Kurvan γ är randen till det positivt orienterade området $D = \{(x, y) : x^2+4y^2 \leq 1\}$. Enlig Greens sats har vi

$$\int_{\partial D} x\sin(y^2)dx+(x^2y\cos(y^2)+2x)dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}[x^2y\cos(y^2)+2x]-\frac{\partial}{\partial y}[x\sin(y^2)]dxdy$$

$$\iint_D 2xy\cos(y^2) + 2 - 2xy\cos(y^2)dxdy = \iint_D 2dxdy = 2\mu(D).$$

Arean av området $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$ är πab. I vårt fall är $a = 1$, $b = 1/2$, så

$$2\mu(D) = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

B59
Vi antar att området D kan delas upp i området av typen

$$E = \{(x, y) : f(y) \leq x \leq g(y), a \leq y \leq b\}.$$

Vi visar att

$$\iint_E \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int_{\partial E} Qdy.$$

Till att börja med har vi att

$$\iint_E \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int_a^b \int_{f(y)}^{g(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$$

$$= \int_a^b [Q]_{f(y)}^{g(y)} dy = \int_a^b Q(g(y), y) dy - \int_a^b Q(f(y), y) dy.$$

Låt γ vara kurvan parametriserad av

$$r(t) = (g(t), t), a \leq t \leq b.$$

Vi får att $r'(t) = (g'(t), 1)$ vilket ger

$$\int_\gamma 0dx + Qdy = \int_a^b (0, Q(g(t), t)) \cdot (g'(t), 1) dt = \int_a^b Q(g(t), t) dt.$$

På samma sätt får vi att

$$\int_\sigma Qdy = \int_a^b Q(f(t), t) dt.$$

Slår vi ihop de här två resultaten får vi att

$$\iint_E \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_\gamma 0dx + Qdy - \int_\sigma Qdy = \int_{\gamma \cup -\sigma} Qdy.$$

Men $\gamma \cup -\sigma = \partial E$. Genom addition av detta resultat för alla uppkommande delområden E av D får vi

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{\partial D} Qdy$$

eftersom kurvintegralerna längs de inre vertikala linjestyckena går åt båda hållen och därför inte ger något nettobidrag.

B60

Vi använder Greens formel

$$\int_{\partial D} (P(x,y)+f(x))dx+(Q(x,y)+g(y))dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}[Q(x,y)+g(y)] - \frac{\partial}{\partial y}[P(x,y)+f(x)] dxdy$$

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}[Q(x,y)] - \frac{\partial}{\partial y}[P(x,y)] dxdy.$$

Den sista integralen beror inte på f och g.

B68

(a)

Vi behöver hitta en funktion $U(x, y)$ så att

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sin(xy) + xy\cos(xy) + 2x,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2\cos(xy) + e^y.$$

För att beräkna U beräknar vi

$$\int (\sin(xy) + xy\cos(xy) + 2x)dx = -\frac{\cos(xy)}{y} + x\sin(xy) + \frac{\cos(xy)}{y} + x^2 + f(y)$$

$$= x\sin(xy) + x^2 + f(y).$$

$$\int (x^2\cos(xy) + e^y)dy = x\sin(xy) + e^y + g(x).$$

Här är $f(y)$ en term som beror bara på y och $g(x)$ en term som enbart beror på x. Likställer vi de två uttrycken får vi

$$x\sin(xy) + e^y + g(x) = x\sin(xy) + x^2 + f(y)$$

Vi ser att $g(x) = x^2$ och $f(y) = e^y$ fungerar, så

$$U(x,y) = x\sin(xy) + x^2 + e^y$$

är en potential till ω. Alltså är ω exakt.

(b)
Vi utgår från potentialen U vi hittade i föregående uppgift och får

$$\int_C \omega = U(2\sqrt{2},1) - U(0,1/3) = 2\sqrt{2}\sin(2\sqrt{2}) + 8 + e - e^{1/3}.$$

(c)
Eftersom $U(0,1) = e$, $U(0,0) = 1$ kan vi låta γ_1 vara en kurva från $(0,0)$ till $(0,1)$ (vilken som helst) eftersom

$$\int_{\gamma_1} \omega = U(0,1) - U(0,0) = e - 1.$$

(d)
Låt γ_2 vara γ_1 med motsatt orientering.

(e)
Låt γ_3 vara en sluten kurva (som enhetscirkeln).

B72
Vi använder Greens sats, eftersom C är den positivt orienterade randen till

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

Vi får

$$\int_C \frac{y^2}{1+x^2y^4}dx + \left(\frac{2xy}{1+x^2y^4}dx + e^x\right)dy$$

$$= \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2xy}{1+x^2y^4}dx + e^x\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{1+x^2y^4}dx\right]dxdy$$

$$= \iint_D \frac{2y(1+x^2y^4) - 2xy\cdot 2xy^4}{(1+x^2y^4)^2} + e^x - \frac{2y(1+x^2y^4) - y^2\cdot 4x^2y^4}{(1+x^2y^4)^2}dxdy$$

$$= \iint_D e^x dxdy.$$

Vi gör variabelbytet $u = x+y$, $v = x-y$. Ekvivalent har vi $x = (u+v)/2$ och $y = (u-v)/2$. Vi får nya gränser $-1 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$ och Jacobian

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}.$$

Tillsammans får vi

$$\iint_D e^x dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{(u+v)/2}\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{v/2}dv \int_{-1}^{1} e^{u/2}du$$

$$\frac{1}{2}[2e^{v/2}]_{-1}^{1}[2e^{u/2}]_{-1}^{1} = 2(e^{1/2} - e^{-1/2})^2.$$

B73

Vi integrerar termen framför dx och får

$$U = \int \frac{-y^2}{x^2+y^4}dx = -\frac{1}{y^2}\int \frac{1}{(x/y^2)^2+1}dx = -\frac{1}{y^2}y^2\tan^{-1}(x/y^2)$$

$$= -\tan^{-1}(x/y^2) = \tan^{-1}\left(\frac{y^2}{x}\right).$$

Vi ser att

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2+y^4},$$

så U är en potential till differentialformen i uppgiften. Alltså gäller

$$\int_\gamma \frac{-y^2dx + 2xydy}{x^2+y^4} = U(1,0) - U(-1,0) = \tan^{-1}(0) - \tan^{-1}(0) = 0.$$

B74
Enligt Greens sats gäller

$$\int_{\partial D} -f\frac{\partial f}{\partial y}dx + f\frac{\partial f}{\partial x}dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left[f\frac{\partial f}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[-f\frac{\partial f}{\partial y}\right] dxdy$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dxdy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy.$$

Vi använder nu att f uppfyller Laplace-ekvationen och får

$$\iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 dxdy.$$

Om f är 0 på ∂D är den ursprungliga integralen noll, vilket betyder att integralen ovan är noll. Det innebär att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Alltså är f en konstant funktion. Eftersom f är noll på ∂D, är f konstant 0.

B77

(a)
Det är en donut.

(b)
(i). Eftersom z-koordinaten är konstant 0 och (x, y) koordinaten har avstånd 2 från origo är det här den yttre ekvatorn till torusen.

(ii). Nu är istället z-koordinaten konstant och som störst, så det är översta ekvatorn till torusen.

(iii). I det här fallet är y-koordinaten konstant 0 och (x, z) koordinaterna rör sig i en cirkel, så vi går alltså i en cirkel kring torusen i en riktning parallell med cirklarna i (i) och (ii).

(c)
Vi beräknar en normalvektor. Vi får

$$r_s \times r_t = \begin{bmatrix} -(2-\cos t)\sin s \\ (2-\cos t)\cos s \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sin t \sin s \\ \sin t \cos s \\ \cos t \end{bmatrix} = (2-\cos t)\begin{bmatrix} \cos t \cos s \\ \cos t \sin s \\ -2\sin t \cos s \sin s \end{bmatrix}.$$

Om $s = \pi/3$ och $t = \pi/2$ får vi $r(s,t) = (1, \sqrt{3}, 1)$. För dess värden blir normalen $r_s \times r_t = (0, 0, -\sqrt{3})$.

(d)
Om $t = \pi$, $s = 0$ är $r(s,t) = (3, 0, 0)$. I det här fallet får vi $r_s \times r_t = (-3, 0, 0)$.

B78
Vi beräknar derivatorna av r

$$r_s = (\cos t, \sin t, 2s), \quad r_s = (-s \sin t, s \cos t, 0).$$

Vi får

$$r_s \times r_t = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s \sin t \\ s \cos t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s^2 \cos t \\ -2s^2 \sin t \\ s(\cos^2 t + \sin^2 t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s^2 \cos t \\ -2s^2 \sin t \\ s \end{bmatrix}.$$

För att tolka normalvektorn grafiskt, hjälper det att se att vår yta är ytan $z = x^2 + y^2$, alltså en paraboloid. Eftersom vår normalvektor har positiv z-koordinat, pekar den inåt.

B82
Vi undersöker skärningen av de två ytorna. Om $x^2+y^2+z^2 = 1$ och $x^2+y^2 = z$ gäller

$$(x^2 + y^2) + z^2 = 1 \Rightarrow z + z^2 = 1 \iff z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Alltså skärs de två ytorna i cirkeln

$$x^2 + y^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

De två områdena Y_1 och Y_2 som uppgiften frågar om är alltså

$$Y_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\},$$

$$Y_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Vi parametriserar vår sfär med sfäriska koordinater,

$$r(\varphi, \theta) = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta).$$

Här gäller $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $0 \leq \theta \leq \pi$. Kravet på z för Y_1 blir

$$\cos(\theta) \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \cos^{-1}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Vi döper det sista uttrycket i olikheten ovan till ψ, och får alltså begränsingar $0 \leq \theta \leq \psi$. Vinkeln ψ är alltså den vinkel mellan 0 och π som uppfyller $\cos(\psi) = (-1+\sqrt{5})/2$.

Vi beräknar nu

$$r_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_\theta = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix},$$

$$r_\theta \times r_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin^2\theta \\ \sin\varphi\sin^2\theta \\ \sin\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

. Vi får

$$||r_\theta \times r_\varphi||^2 = \cos^2\varphi\sin^4\theta + \sin^2\varphi\sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= \sin^4\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= \sin^2\theta.$$

Eftersom $\sin\theta \geq 0$ för $0 \leq \theta \leq \pi$ får vi $||r_\theta \times r_\varphi|| = \sin\theta$.

Vi kan nu räkna ut arean av Y_1. Vi får

$$\text{Area av } Y_1 = \iint_{Y_1} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\psi} ||r_\theta \times r_\varphi|| d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\psi} \sin\theta d\theta = 2\pi[-\cos(\theta)]_0^{\psi} = 2\pi(1-\cos(\psi)) = \pi(3-\sqrt{5}).$$

För att få arean av Y_2 subtraherar vi arean av Y_1 från den total arean

$$4\pi - \pi(3-\sqrt{5}) = \pi(1+\sqrt{5}).$$

B85

Kalla sfären Y, och låt $r(s,t)$ för $s,t \in D$ vara en parametrisering av sfären. Vi har

$$\iint_Y F \cdot N dS = \int_D F(r(s,t)) \cdot (r_s \times r_t) dsdt$$

$$\iint_D F(r(s,t)) \cdot \frac{(r_s \times r_t)}{||r_s \times r_t||} ||r_s \times r_t|| dsdt = \iint_D -\frac{r}{||r||^4} \cdot \frac{(r_s \times r_t)}{||r_s \times r_t||} ||r_s \times r_t|| dsdt.$$

Vi noterar att $\frac{(r_s \times r_t)}{||r_s \times r_t||}$ är en enhetsnormalvektor som pekar inåt i sfären, så den måste vara $-r/||r||$. Alltså får vi

$$\iint_D -\frac{r}{||r||^4} \cdot -\frac{r}{||r||}||r_s \times r_t||dsdt = \iint_D \frac{||r||^2}{||r||^5}||r_s \times r_t||dsdt$$

$$= \frac{1}{R^3}\iint_D ||r_s \times r_t||dsdt = \frac{1}{R^3}\text{Area av Y} = \frac{1}{R^3}4\pi R^2 = \frac{4\pi}{R}.$$

B93

Vi sluter ytan Y med locket

$$Y_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}, z = 0\}.$$

Nu är $Y \cup Y_1$ randen till kroppen

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \cos(x^2 + y^2)\}.$$

Vi beräknar först ytintegralen över Y_1. Vi parametriserar Y_1 som

$$r(x, y) = (x, y, 0), \quad x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Vi får

$$r_x = (1, 0, 0), \quad r_y = (0, 1, 0), \quad r_y \times r_x = (0, 0, -1).$$

Notera här att normalen $r_y \times r_x$ pekar ut från K så att vi kan använda Gauss sats. Vi beräknar

$$\iint_{Y_1} F \cdot NdS = \iint_{x^2+y^2\leq\frac{\pi}{2}} (x^3, y^3, 1) \cdot (0, 0, -1)dxdy$$

$$= -\iint_{x^2+y^2\leq\frac{\pi}{2}} dxdy = -\text{Area av cirkel med radie } \pi/2 = -\frac{\pi}{2}\pi = -\frac{\pi^2}{2}.$$

Nu beräknar vi integralen över K. En parametrisering av K ges av $0 \leq z \leq \cos(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 \leq \pi/2$. Vi får

$$\iiint_K divFdV = \iint_{x^2+y^2\leq\pi/2}\int_0^{\cos(x^2+y^2)} 3x^2 + 3y^2dzdxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq\pi/2} 3(x^2 + y^2)\cos(x^2 + y^2)dxdy.$$

Vi byter till polära koordinater

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 3r^2\cos(r^2)rdrd\theta = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi/2}} r^3\cos(r^2)dr.$$

Vi beräknar en primitiv till $r^3\cos(r^2)$ genom att sätta $u = r^2$, så att $du = 2rdr$.

$$\int r^3\cos(r^2)dr = \int \frac{1}{2}u\cos(u)du = \frac{1}{2}u\sin(u) - \int \frac{1}{2}\sin(u)du$$

$$= \frac{1}{2}u\sin(u) + \frac{1}{2}\cos(u) = \frac{1}{2}(r^2\sin(r^2) + \cos(r^2)).$$

Vi kan nu slutföra våra uträkningar.

$$3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{\pi/2}} r^3\cos(r^2)dr = 3\cdot 2\pi\left[\frac{1}{2}(r^2\sin(r^2) + \cos(r^2))\right]_0^{\sqrt{\pi/2}}$$

$$= 3\pi(\frac{\pi}{2}\sin(\pi/2) - \cos(0)) = \frac{3\pi^2}{2} - 3\pi.$$

Vi använder nu Gauss sats och får

$$\iint_Y F\cdot NdS = \iiint_K divFdV - \iint_{Y_1} F\cdot NdS = \frac{3}{2}\pi^2 - 3\pi - (-\frac{\pi^2}{2}) = 2\pi^2 - 3\pi.$$

B94

Vi täpper till vår yta Y med två lock,

$$Y_1 = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}, \quad Y_2 = \{x^2 + y^2 = 2, z = 1\}.$$

Ytan $Y_1 \cup Y_2 \cup Y$ innesluter nu kroppen

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Vi kan parametrisera Y_1 som

$$r(x, y) = (x, y, 0), \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Normalen $r_y \times r_x = (0, 0, -1)$ pekar ut från K, så det är rätt normal för att använda Gauss sats. Vi får

$$\iint_{Y_1} F\cdot NdS = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^4 - x^5, 5x^4y, 0)\cdot(0, 0, -1)dxdy = 0.$$

Vi parametriserar Y_2 som

$$r(x,y) = (x,y,1), \quad x^2+y^2 \leq 2.$$

Normalen $r_x \times r_y = (0,0,1)$ pekar ut från K, så det är rätt normal för att använda Gauss sats. Vi får

$$\iint_{Y_2} F \cdot N dS = \iint_{x^2+y^2\leq 2} (x^4+y-x^5, 5x^4y, 1)\cdot(0,0,1)dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 2} dxdy = \text{Area av cirkel med radie } \sqrt{2} = 2\pi.$$

Vi räknar nu ut trippelintegralen över K.

$$\iiint_K divFdV = \int_0^1 \int_{x^2+y^2\leq z^2+1} 4x^3 - 5x^4 + 5x^4 + 1dxdydz$$

$$\int_0^1 \int_{x^2+y^2\leq z^2+1} 4x^3dxdydz + \int_0^1 \int_{x^2+y^2\leq z^2+1} dxdydz.$$

Den första integralen är udda i x och K är symmetrisk i x, så den är 0. Den andra integralen kan räknas ut som

$$\int_0^1 \int_{x^2+y^2\leq z^2+1} dxdydz = \int_0^1 \text{Area av cirkel med radie } z^2+1dz$$

$$= \int_0^1 \pi(z^2+1)dz = \pi\left[\frac{z^3}{3}+z\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Vi kan nu använda Gauss sats för att få

$$\iint_Y F\cdot NdS = \iiint_K divFdV - \iint_{Y_1} F\cdot N - dS \iint_{Y_2} F\cdot NdS$$

$$= \frac{4\pi}{3} - 0 - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

B95

Vi täpper till Y med locket

$$Y_1 = \{x^2+y^2 \leq 4, z = 4\}.$$

Ytan $Y_1 \cup Y$ är nu randen till kroppen

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq z \leq 4.$$

Vi kan parametrisera Y_1 som

$$r(x, y) = (x, y, 4), \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

Normalen $r_y \times r_x = (0, 0, 1)$ pekar ut från K, så det är rätt normal för att använda Gauss sats. Vi får

$$\iint_{Y_1} F \cdot N dS$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (16x^2 + 16y^2 + 4xy, 4x - 32xy - 2y^2, 4e^{x^2+y^2}) \cdot (0, 0, 1) dxdy$$

$$4 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{x^2+y^2} dxdy.$$

Vi byter till polära koordinater och får

$$4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 re^{r^2} drd\theta = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 re^{r^2} dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{e^{r^2}}{2} \right]_0^1 = \pi(e - 1).$$

Vi räknar nu ut trippelintegralen över K.

$$\iiint_K divF dV = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \int_{x^2+y^2}^4 2xz^2 + yz - 2xz^2 - yz + e^{x^2+y^2} dzdxdy$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} e^{x^2+y^2} \int_{x^2+y^2}^4 dzdxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} e^{x^2+y^2} (4 - x^2 - y^2) dxdy.$$

Vi byter till polära koordinater

$$\int_0^{2\pi} \int_0^4 e^{r^2} (4 - r^2) rdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 e^{r^2} (4 - r^2) rdr$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} e^{r^2} (5 - r^2) \right]_0^4 = -\pi(11e^{16} + 5).$$

Vi använder nu Gauss sats

$$\iint_Y F \cdot N dS = \iiint_K divF dV - \iint_{Y_1} F \cdot N dS = \pi(e-1) + \pi(11e^{16}+5).$$

B96
Vi täpper till vår yta Y med två lock,

$$Y_1 = \{x^2+y^2=1, z=0\}, \quad Y_2 = \{(x-1)^2+(y-1)^2=2, z=1\}.$$

Ytan $Y_1 \cup Y_2 \cup Y$ innesluter nu kroppen

$$K = \{(x,y,z) : (x-z)^2+(y-z)^2 \leq z^2+1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Vi kan parametrisera Y_1 som

$$r(x,y) = (x,y,0), \quad x^2+y^2 \leq 1.$$

Normalen $r_y \times r_x = (0,0,-1)$ pekar ut från K, så det är rätt normal för att använda Gauss sats. Vi får

$$\iint_{Y_1} F \cdot N dS = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (y,x,1)\cdot(0,0,-1)dxdy$$

$$= -\iint_{x^2+y^2\leq 1} dxdy = -\text{ Area av cirkel radie } 1 = -\pi.$$

Vi parametriserar Y_2 som

$$r(x,y) = (x,y,1), \quad (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 2.$$

Normalen $r_x \times r_y = (0,0,1)$ pekar ut från K, så det är rätt normal för att använda Gauss sats. Vi får

$$\iint_{Y_2} F \cdot N dS = \iint_{(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2} (y,x,1+x^2)\cdot(0,0,1)dxdy$$

$$= \iint_{(x-1)^2+(y-1)^2\leq 2} (1+x^2)dxdy.$$

Vi gör koordinatbytet $x = r\cos\theta + 1$, $y = r\sin\theta + 1$ och får

$$\iint_{x^2+y^2\leq 2} (1+x^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (1+(r\cos\theta+1)^2)rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr + \int_0^{2\pi} 2\cos\theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} 2r dr.$$

Den mittersta termen försvinner eftersom vi integrerar $\cos\theta$ där θ går från 0 till 2π. Vi räknar vidare

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))d\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} + 2\pi \left[r^2\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta))\right]_0^{2\pi} \cdot 1 + 4\pi = 5\pi$$

Vi räknar nu ut trippelintegralen över K. Vi gör variabelbytet $x = r\cos\theta + z, y = r\sin\theta + z, z = z$. Vi får Jacobian

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 1 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r.$$

Olikheten $(x-z)^2 + (y-z)^2 \leq z^2 + 1$ blir $r^2 \leq z^2 + 1$. Vi får

$$\iiint_K divF dV = \iiint_K x^2 dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+z^2}} (r\cos\theta + z)^2 r dr dz d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r^3 \cos^2\theta dr dz d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+z^2}} 2r^2 \cos\theta z dr dz d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r z^2 dr dz d\theta.$$

Den mittersta termen kommer att bli 0, eftersom vi integrerar $\cos\theta$ från 0 till 2π. Vi får

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^1 \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1+z^2}} dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 z^2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1+z^2}} dr dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))d\theta \int_0^1 \frac{1}{4}(1+z^2)^2 dz + 2\pi \int_0^1 \frac{z^2}{2}(1+z^2) dr dz$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta))\right]_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left[\frac{z^5}{5} + \frac{2z^3}{3} + z\right]_0^1 + \pi\left[\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4}(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1) + \pi(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}) = \pi.$$

Vi kan nu använda Gauss sats för att få

$$\iint_Y F \cdot N dS = \iiint_K divF dV - \iint_{Y_1} F \cdot N dS - \iint_{Y_2} F \cdot N dS$$

$$= \pi - (-\pi) - 5\pi = -3\pi.$$

B97
Vi täpper till vår yta Y med två lock,

$$Y_1 = \{x^2 + y^2 = 2, z = -1\}, \quad Y_2 = \{x^2 + y^2 = 2, z = 1\}.$$

Ytan $Y_1 \cup Y_2 \cup Y$ innesluter nu kroppen

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}.$$

Vi kan parametrisera Y_1 som

$$r(x, y) = (x, y, -1), \quad x^2 + y^2 \leq 2.$$

Normalen $r_y \times r_x = (0, 0, -1)$ pekar ut från K, så det är rätt normal för att använda Gauss sats. Vi får

$$\iint_{Y_1} F \cdot N dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (xy, -y^2, -1) \cdot (0, 0, -1) dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy = \text{Area av cirkel med radie } \sqrt{2} = 2\pi.$$

Vi parametriserar Y_2 som

$$r(x, y) = (x, y, 1), \quad x^2 + y^2 \leq 2.$$

Normalen $r_x \times r_y = (0, 0, 1)$ pekar ut från K, så det är rätt normal för att använda Gauss sats. Vi får

$$\iint_{Y_2} F \cdot N dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (xy, y^2, 1) \cdot (0, 0, 1) dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 2} dxdy = \text{Area av cirkel med radie } \sqrt{2} = 2\pi.$$

Vi räknar nu ut trippelintegralen över K.

$$\iiint_K divF dV = \int_{-1}^{1} \int_{x^2+y^2 \leq z^2+1} y + 2yz + 1 dxdydz$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{x^2+y^2 \leq z^2+1} y dxdydz + \int_{-1}^{1} \int_{x^2+y^2 \leq z^2+1} 2yz dxdydz + \int_{-1}^{1} \int_{x^2+y^2 \leq z^2+1} dxdydz.$$

De två första integralerna är udda i y och området som integreras över är symmetriskt i y, så de kommer att bli 0. Det återstår att beräkna

$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2+y^2 \leq z^2+1} dxdydz = \int_{-1}^{1} \text{Area av cirkel med radie } z^2 + 1 dz$$

$$= \int_{-1}^{1} \pi(z^2+1)dz = \pi \left[\frac{z^3}{3} + z \right]_{-1}^{1} = \frac{8\pi}{3}.$$

Vi kan nu använda Gauss sats för att få

$$\iint_Y F \cdot N dS = \iiint_K divF dV - \iint_{Y_1} F \cdot N dS - \iint_{Y_2} F \cdot N dS$$

$$= \frac{8\pi}{3} - 2\pi - 2\pi = -\frac{4\pi}{3}.$$

B103

Vi låter $Y = \{(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4, z = x + 2y\}$. Enligt Stokes sats gäller

$$\int_\gamma F \cdot dr = \iint_Y \operatorname{rot} F \cdot N dS$$

Där N är orienterad uppåt i positiv z-riktning. Vi beräknar

$$\operatorname{rot} F = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4x^3y^3 + z \\ 3x^4y^2 + z^2 \\ z^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z \\ 1 \\ 12x^3y^2 - 12x^3y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi parametriserar Y som

$$r(s,t) = (s+1, t+2, (s+1) + 2(t+2)) = (s+1, t+1, s+2t+5),$$

$$s^2 + t^2 \leq 4.$$

Vi får $r_s = (1,0,1)$, $r_t = (0,1,2)$.

$$r_s \times r_t = (-1, -2, 1).$$

Eftersom z-koordinaten är positiv är det här rätt orientering på N. Vi kan nu beräkna

$$\iint_Y \operatorname{rot} F \cdot N dS = \iint_{s^2+t^2 \leq 4} \operatorname{rot} F(r(s,t)) \cdot (-1, -2, 1) dsdt$$

$$= \iint_{s^2+t^2\le 4} (-2(s+2t+5),1,0)\cdot(-1,-2,1)dsdt = \iint_{s^2+t^2\le 4} 2s+4t+8dsdt$$

$$= \iint_{s^2+t^2\le 4} 2sdsdt + \iint_{s^2+t^2\le 4} 4tdsdt + 8\iint_{s^2+t^2\le 4} dsdt.$$

De två första integralerna är 0 eftersom de är över udda funktioner på ett område symmetrisk i s/t-axeln, medan den sista integralen är 8 gånger arean av en cirkel med radie 4, alltså 32π.

B104

Vi låter $Y = \{x^2+y^2 \le 1, z = 2xy\}$. Enligt Stokes sats gäller

$$\int_\gamma F\cdot dr = \iint_Y \operatorname{rot} F \cdot N dS$$

Där N är orienterad uppåt i positiv z-riktning. Vi beräknar

$$\operatorname{rot} F = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ye^x \\ e^x + x^3 \\ z^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x + 3x^2 - e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2 \end{bmatrix}.$$

Vi parametriserar Y som

$$r(s,t) = (s,t,2st), s^2+t^2 \le 1.$$

Vi får $r_s = (1,0,2t)$, $r_t = (0,1,2s)$.

$$r_s \times r_t = (-2t,-2s,1).$$

Eftersom z-koordinaten är positiv är det här rätt orientering på N. Vi kan nu beräkna

$$\iint_Y \operatorname{rot} F\cdot NdS = \iint_{s^2+t^2\le 1} \operatorname{rot} F(r(s,t))\cdot(-2t,-2s,1)dsdt$$

$$= \iint_{s^2+t^2\le 1} (0,0,3t^2)\cdot(-2t,-2s,1)dsdt = \iint_{s^2+t^2\le 1} 3t^2dsdt.$$

Vi byter till polära koordinater

$$\iint_{s^2+t^2\le 1} 3t^2dsdt = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3\cos^2\theta r^3 drd\theta = \int_0^{2\pi} 3\cos^2\theta d\theta \int_0^1 r^3 dsdt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}(1+\cos(2\theta))d\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left[\theta + \frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} \frac{1}{4} = \frac{3}{2}2\pi\frac{1}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

B105
Vi låter $Y = \{x^2 + y^2 + 1 \leq 4, z = 1\}$. Enligt Stokes sats gäller

$$\int_\gamma F \cdot dr = \iint_Y \operatorname{rot} F \cdot N dS$$

Där N är orienterad uppåt i positiv z-riktning. Vi beräknar

$$\operatorname{rot} F = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z\cos y \\ -xz\sin y + 2x \\ x\cos y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x\sin y + x\sin y \\ \cos y - \cos y \\ -z\sin y + 2 + z\sin y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi parametriserar Y som

$$r(s,t) = (s,t,1), s^2 + t^2 \leq 3.$$

Vi får $r_s = (1,0,0)$, $r_t = (0,1,0)$.

$$r_s \times r_t = (0,0,1).$$

Eftersom z-koordinaten är positiv är det här rätt orientering på N. Vi kan nu beräkna

$$\iint_Y \operatorname{rot} F \cdot N dS = \iint_{s^2+t^2\leq 3} \operatorname{rot} F(r(s,t)) \cdot (0,0,1) dsdt$$

$$= \iint_{s^2+t^2\leq 3} (0,0,2)\cdot(0,0,1)dsdt = \iint_{s^2+t^2\leq 3} 2dsdt.$$

Det här är 2 gånger arean av en cirkel med radie 3, alltså 6π.

B113
Vi försöker hitta en potential till kraftfältet

$$F = (yze^{xyz}, zxe^{xyz}, xye^{xyz}),$$

alltså en funktion U så att

$$\frac{\partial U}{\partial x} = yze^{xyz},\ \frac{\partial U}{\partial y} = zxe^{xyz},\ \frac{\partial U}{\partial x} = xye^{xyz}.$$

En sådan funktion ges tex av $U = e^{xyz}$. Eftersom Γ_a går mellan punkten $(\cos(0), \sin(0), 0) = (1,0,0)$ och punkten $(\cos(a), \sin(a), a)$, får vi nu

$$\int_{\Gamma_a} F \cdot dr = U(\cos(a), \sin(a), a) - U(1,0,0)$$

$$= e^{\cos(a)\sin(a)a} - e^0 = e^{\cos(a)\sin(a)a} - 1.$$

B114
En nödvändigt krav för att F ska ha en potential är att $\operatorname{rot} F = 0$. Det är också tillräckligt i vårt fall eftersom $\mathbb{R}^3$ är enkelt sammanhängande. Vi räknar

$$\operatorname{rot} F = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} axy + 2z \\ x^2 + 2yz \\ y^2 + bx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y - 2y \\ 2 - b \\ 2x - ax \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 - b \\ x(2-a) \end{bmatrix}.$$

Alltså är F konservativt om och endast om $b = 2$ och $a = 2$. Säg att vi är i det fallet och låt U vara en potential till F. Vi har att

$$U = \int 2xy + 2zdx = x^2y + 2zx + f(y,z),$$

$$U = \int x^2 + 2yzdy = x^2y + y^2z + g(x,z),$$

$$U = \int y^2 + 2xdz = y^2z + 2zx + h(x,y).$$

Vi ser att $f(y,z) = y^2z$, $g(x,z) = 2zx$ och $h(x,y) = x^2y$ funkar och

$$U = y^2z + 2zx + x^2y$$

är en potential till F.

B115
Enligt Stokes sats gäller

$$\int_\gamma (f\nabla g) \cdot dr = \iint_Y \operatorname{rot}(f\nabla g) \cdot \mathbf{n} \; dS.$$

Vi beräknar

$$\operatorname{rot}(f\nabla g) = \nabla \times (f\nabla g) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} fg_x \\ fg_y \\ fg_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_yg_z + fg_{yz} - f_zg_y - fg_{yz} \\ f_zg_x + fg_{xz} - f_xg_z - fg_{xz} \\ f_xg_y + fg_{xy} - f_yg_x - fg_{xy} \end{bmatrix} = \nabla f \times \nabla g.$$

B116

(a)
Vi kan parametrisera γ som

$$\gamma(t) = Re^{it} + a, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Per definition har vi för komplexa kurvintegraler

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

I vårt fall är $f(z) = 1/(z-a)^n$, så vi får

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{(z-a)^n}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(Re^{it}+a-a)^n}Rie^{it}dt \\ &= \int_0^{2\pi} iR^{1-n}e^{it(1-n)}dt.\end{aligned}$$

Om $n \neq 1$ får vi

$$\int_0^{2\pi} iR^{1-n}e^{it(1-n)}dt = \left[\frac{iR^{1-n}e^{it(1-n)}}{i(1-n)}\right]_0^{2\pi} = \frac{R^{1-n}}{(1-n)}(e^{2\pi i(1-n)} - e^0) = 0.$$

Sista olikheten får vi eftersom $e^{2\pi ik} = 1$ där k är ett heltal. Om $n = 1$ får vi istället

$$\int_0^{2\pi} iR^{1-n}e^{it(1-n)}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.$$

(b)

Enligt följdsats 3.1 i boken är integralen längs en kurva som är den positivt orienterade randen till ett kompakt område där integranden är analytisk 0. Vi kan alltså betrakta cirkeln med radie 1/2 inuti kvadraten, så att cirkeln med negativ orientering+kvadraten med positiv orientering innesluter ett område där $1/(z-a)^n$ är analytisk. Alltså är integralen över cirkeln integralen över kvadraten 0, så de två integralerna är lika. Alltså ger uppgift (a) och (b) samma svar.

B119

(a)

Vi avgör om Cauchy-Riemann ekvationerna är uppfyllda. För f har vi $f = u+iv$ där $u(x,y) = x^2 + xy$ och $v = xy + y^2$. Vi har

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq 2y = \frac{\partial u}{\partial y},$$

så f är inte analytisk. För g gäller

$$g(z) = e^{-y}(\cos x + i\sin y) = e^{-y}e^{ix} = e^{ix-y} = e^{i(x+iy)} = e^{iz}.$$

Alltså är g kompositionen av två analytiska funktioner (e^z och iz) så den är analytisk.

(b)
Vi har att
$$\frac{d}{dz}e^{iz} = ie^{iz}.$$

(c)
Kurvintegralen över g är 0 enligt Cauchys integralsats. För f parametriserar vi cirkeln som $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ och får

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} f(\cos t + i \sin t)(i \cos t - \sin t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \cos t \sin t + i(\cos t \sin t + \sin^2 t))(i \cos t - \sin t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -2 \sin t \cos^2 t - 2 \cos t \sin^2 t dt$$

$$+i \int_0^{2\pi} (\cos^3 t + \cos^2 t \sin t - \sin^2 t \cos t - \sin^3 t)dt.$$

Vi visar nu att den här integralen är 0 genom att visa att integralen över var och en av termerna är 0. Eftersom $\cos(t+\pi) = -\cos t$ och $\sin(t+\pi) = -\sin t$ kommer integralen över $[0, \pi]$ vara minus integralen över $[\pi, 2\pi]$ för var och en av funktionerna $\cos^3 t, \cos^2 t \sin t, \cos t \sin^2 t, \sin^3 t,$ så integralen över $[0, 2\pi]$ kommer att bli 0.

B125
Vi har att $z^3 + 4z = z(z + 2i)(z - 2i)$. Alltså har f singulariteter kring $z = 0, 2i, -2i$.

(a)
Singulariteten $z = 0$ är den enda singulariteten som ligger inuti cirkeln, så enligt Cauchys integralsats gäller

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3 + 4z} dz = \int_{|z|=1} \frac{e^z/(z^2+4)}{z} dz = 2\pi i(e^0/(0^2+4)) = \frac{\pi i}{2}.$$

(b)
Singulariteterna $z = 0, 2i, -2i$ ligger alla inuti inuti cirkeln, så enligt Cauchys residysats kan vi räkna ut

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^3+4z} dz = \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z+2i)(z-2i)} dz$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^0}{(0+2i)(0-2i)} + \frac{e^{2i}}{2i(2i+2i)} + \frac{e^{-2i}}{-2i(-2i-2i)} \right) = \frac{\pi i}{2} + \frac{\pi e^{2i}}{4} + \frac{\pi e^{-2i}}{4}.$$

(c)
Singulariteterna $z = 0, 2i$ ligger inuti cirkeln, så enligt Cauchys residysats kan vi räkna ut

$$\int_{|z-1-i|=3} \frac{e^z}{z^3+4z} dz = \int_{|z-1-i|=3} \frac{e^z}{z(z+2i)(z-2i)} dz$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^0}{(0+2i)(0-2i)} + \frac{e^{2i}}{2i(2i+2i)} \right) = \frac{\pi i}{2} + \frac{\pi e^{2i}}{4}.$$

(d)
Nu är inte integralen väldefinierad, då $2i$ och $-2i$ är singulariteter till f som ligger på kurvan.

B129

(a)
Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{e^{ix}}{x^2+4}.$$

Om x är reell gäller det att

$$\Re(f(x)) = \frac{\cos(x)}{x^2+4}.$$

Funktionen f har två singulariteter, då $x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$. Endast $x = 2i$ ligger på det övre halvplanet. Vi kan argumentera som i exempel 5.1 i kompendiumet och får att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4} dx = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{ix}/(x+2i)}{x-2i} dx = 2\pi i \cdot e^{i(2i)}/(2i+2i) = \frac{\pi e^{-2}}{2}.$$

Vi får nu att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+4} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Re\left(\frac{e^{ix}}{x^2+4}\right) dx = \Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4} dx\right) = \frac{\pi e^{-2}}{2}.$$

(b)

Notera att integranden i uppgiften är jämn, så

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2+4} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2+4} dx.$$

Den viktigaste detaljen som användes för att argumentet skulle fungera i del (a) var att $|e^{ix}| \leq 1$, då x var ett komplext tal på övre halvplanet. Om $x = a + ib$ är ett komplext tal på övre halvplanet (så att $b > 0$) så har vi

$$|e^{-x}| = |e^{-a^2+b^2-2iab}| = |e^{-a^2+b^2}||e^{-2iab}| = e^{-a^2+b^2}.$$

Problemet här är $e^{-a^2+b^2}$ kan vara godtyckligt stor på övre halvplanet. Alltså fungerar inte strategin i det här fallet.

B122

(a)

Om vi tex låter vårt intervall vara $\mathbb{R}$, och följer stegen i beviset får vi

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f_k(x) - f(x) dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} M_k dx,$$

men integralen till höger är inte ändlig, så argumentet bryter ner här.

(b)

I första fallet har vi då $x \neq 0$

$$|f_k(x)| = \sqrt{k}x(1+k^2x^2)^{-1} = k^{-1/2}\left(\frac{1}{kx} + kx\right)^{-1}$$

$$= k^{-1/2}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{kx}} - \sqrt{kx}\right)^2 + 2\right)^{-1} \leq k^{-1/2}2^{-1} \to 0.$$

Eftersom den sista olikheten är oberoende av x och går mot 0 är följden f_k likformigt konvergent mot $f(x) = 0$.

I andra fallet har vi för ett fixt $x \in [0, 1]$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{kx}{1+k^2x^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{x}{(1/k^2+x^2)k} = 0.$$

Alltså konvergerar serien punktvis mot 0. Den kan inte konvergera likformigt mot 0, eftersom vi kan hitta en sekvens $x_k = 1/k$ så att

$$|g_k(x_k)| = \frac{k(1/k)}{1 + k^2(1/k)^2} = \frac{1}{2}.$$

Alltså kan vi inte garantera att g_k blir godtyckligt liten då k är tillräckligt stort.

I tredje fallet har vi att för fixt $x \in (0, 1]$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^2 x}{1 + k^2 x^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{x}{1/k^2 + x^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Alltså konvergerar h_k mot $1/x$, och om $x = 0$ har vi $h_k(x) = 0$, så h_k konvergerar punktvis mot en funktion som är $1/x$ på $(0, 1]$ och 0 då $x = 0$. Det är inte en kontinuerlig funktion, så h_k kan inte konvergera likformigt.

B126

(a)
Vi har

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Eftersom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \infty$$

följer det av Weierstrass majorantsats att vår ursprungliga serie konvergerar likformigt.

(b)
Vi har att

$$\sum_{n=1}^{N} x^n(1 - x) = \sum_{n=1}^{N} x^n - x^{n+1}$$

$$= x - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 - x^4 + ... + x^N - x^{N+1} = x - x^{N+1}.$$

Om $x \in (-1, 1)$ konvergerar serien mot x, och om $x = 1$ konvergerar serien mot 0. Det är inte en kontinuerlig funktion, så vi kan inte ha likformig konvergens.

B132

(a)
Betrakta istället potensserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{2k + 1}.$$

Vi använder kvotkriteriet och beräknar

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \lim_{k\to\infty} \frac{2+3/k}{2+1/k} = 1.$$

Alltså har vår serie konvergensradie 1, vilket innebär att vår ursprungliga serie konvergerar då $|x^2| < 1$, alltså då $|x| < 1$. Alltså har den ursprungliga serien konvergensradie 1.

Vi betraktar fallet då $|x| = 1$. Om $x = 1$ blir serien

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

som är en alternerande serie vars koefficienter går mot 0, så den konvergerar enligt Leibniz kriterium. Om $x = -1$, har vi serien

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{-1}{2k+1}$$

som också konvergerar av samma anledning.

(b)
Det komplexa talet $i/2$ har avstånd $1/2$ från origo, så den ligger inuti konvergensradien och därmed konvergerar serien då $x = i/2$. Det komplexa talet $1+i$ har avstånd $\sqrt{2}$ från origo så det ligger utanför konvergensradien, så serien divergerar här. Om $x = i$ så blir serien

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(i^2)^k i}{2k+1} = i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}.$$

Den här serien kan omöjligt konvergera då

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

vilket är den harmoniska serien som divergerar.

(c)
Vi har att

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k} dt$$

$$= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-t^2)^k dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(x).$$

B133

(a)
Vi har att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z t^{k-1} dt = \int_0^z \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} dt = \int_0^z \frac{1}{1-t} dt = -\ln|1-z|.$$

Om vi sätter in $z/5$ får vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{5^k k} = -\ln\left|1 - \frac{z}{5}\right|.$$

För att hitta konvergensradien använder vi kvotkriteriet och får

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{5^k k}{5^{k+1}(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{5(1+1/k)} = \frac{1}{5}.$$

Alltså är $R = 5$ så serien konvergerar då $|z| < 5$.

Vi undersöker nu om $|z| = 5$. Om $z = 5$ får vi serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

som divergerar, och om $z = -5$ får vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

som konvergerar till $\ln 2$.

(b)
Från (a) ser vi att serie (i) konvergerar om $|z| < 5$, och från egenskaper av potensserier får vi att serie (i) konvergerar likformigt i intervallet $[-4,99; 4,99]$.

För serie (ii) använder vi kvotkriteriet och får

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{5^k k^2}{5^{k+1}(k+1)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{5(1+1/k)^2} = \frac{1}{5}.$$

Alltså är $R = 5$ och intervallet $[-4,99; 4,99]$ fungerar igen.

B134

(a)
För (i) använder vi kvotkriteriet

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2k!}{2(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$

Alltså är $R = \infty$ och serien konvergerar för alla $z \in \mathbb{C}$.

För (ii) använder vi rotkriteriet,

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{1}{k} = 1.$$

Alltså konvergerar serie (ii) om $|(z-1)^2| < 1$, så den har konvergensradie 1. Alltså konvergerar den då $|z-1| < 1$. Det återstår att undersöka situationen då $|z-1| = 1$. Om vi undersöker termerna i fallet då $|z-1| = 1$ får vi

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} |z-1|^{2k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} = e^{-1}.$$

För att en serie ska konvergera måste termerna gå mot 0, alltså kan serien inte konvergera i det här fallet.

För (iii) använder vi rotkriteriet,

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} (k^k)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} k = \infty.$$

Alltså är $R = 0$, och serien konvergerar endast om $z = 0$.

B136
Integranden har singulariteter i $z = 0$ och $z = -3i$.

(a)
Singulariteten $z = 0$ ligger på kurvan så integralen är inte väldefinierad.

(b)
Singulariteten $z = -3i$ ligger på kurvan så integralen är inte väldefinierad.

(c)
Här är båda singulariteter inuti cirkeln. Eftersom kurvintegraler över analytiska

funktioner är vägoberoende, kan vi istället integrera över en cirkel Γ_1 runt $z = 0$ och en cirkel Γ_2 kring $z = -3i$. För Γ_2 får vi enligt Cauchys integralformel

$$\int_{\Gamma_2} \frac{e^z}{z^2(z+3i)} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{e^z/z^2}{(z+3i)} dz = 2\pi i(e^{-3i}/(-3i)^2) = -\frac{2\pi i e^{-3i}}{9}.$$

För Γ_1 skriver vi om $e^z/(z+3i)$ som en potensserie kring $z = 0$. Vi får

$$e^z = 1 + z + z^2 g(z)$$

där $g(z)$ är en analytisk funktion. Vi får

$$\frac{1}{z+3i} = \frac{1}{3i} \frac{1}{(z/(3i)+1)} = \frac{1}{3i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z/(3i))^k = \frac{1}{3i} + \frac{z}{9} + z^2 h(z)$$

där $h(z)$ är en analytisk funktion. Alltså får vi tillsammans

$$\frac{e^z}{z+3i} = (1 + z + z^2 g(z)) \left(\frac{1}{3i} + \frac{z}{9} + z^2 h(z) \right)$$

$$= \frac{1}{3i} + z(\frac{1}{3i} + \frac{1}{9}) + z^2 f(z),$$

där $f(z)$ är analytisk. Alltså får vi

$$\frac{e^z}{z^2(z+3i)} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{3i} + \frac{1}{z} \left(\frac{1}{3i} + \frac{1}{9} \right) + f(z).$$

Vi kan nu integrera

$$\int_{\Gamma_1} \frac{e^z}{z^2(z+3i)} dz = \frac{1}{3i} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{z^2} dz + \left(\frac{1}{3i} + \frac{1}{9} \right) \int_{\Gamma_1} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma_1} f(z) dz.$$

Enligt B116 är den första integralen 0, den andra $2\pi i$ och den sista är 0 enligt Cauchys integralsats. Alltså får vi

$$\int_{\Gamma_1} \frac{e^z}{z^2(z+3i)} dz = \left(\frac{1}{3i} + \frac{1}{9} \right) 2\pi i = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi i}{9}.$$

Vi lägger ihop de tidigare svaren och får

$$\int_{\Gamma} = -\frac{2\pi i e^{-3i}}{9} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi i}{9}.$$

(d)
Den här innehåller ingen singularitet, så enligt Cauchys integralsats blir integralen 0.

B137
Vi ansätter
$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$
och får
$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k.$$
Ekvationen $y(x) = y''(x)$ blir
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k$$
vilket ger
$$a_k = a_{k+2}(k+2)(k+1) \iff a_{k+2} = a_k \frac{1}{(k+2)(k+1)}.$$
Kraven $y(0) = y'(0) = 1$ blir $a_0 = a_1 = 1$. Man kan visa med induktion att
$$a_k = \frac{1}{k!},$$
så
$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$