21. XI. 2022

A.J. Matematik II – Analys del B VII

* Kurvintegraler i rummet
* Ytor i rummet

— * —

Förra gången:

- Vi säger $u \in C^1(\Omega)$ är potential till $\vec{F} = (P, Q)$ i Ω

  om

  $$\operatorname{grad} u = \vec{F}.$$

- Om $\vec{F}$ är konservativt fält gäller vägoberoende:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = u(\vec{b}) - u(\vec{a})$$

där γ går från $\vec{a}$ till $\vec{b}$.

- Nödvändigt villkor för konservativt fält:

  om $u \in C^2(\Omega)$ så gäller $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

  två

- Om $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ enkelt sammanhängande — kurvor kan deformeras i Ω

  gör $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ att $\vec{F} = (P, Q)$ har en potential i Ω.

  (Använd Greens formel.)

A.S.

Kurvintegraler i rummet :

Betrakta vektorfält $\vec{F} : R^3 \to R^3$

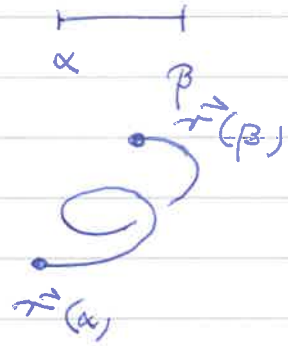
$$\vec{F} = \big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z) \big)$$

$$\big(P, Q, R \in C \quad (\text{kont. fkner}) \big)$$

och kurva på parameterform

$$\vec{r} = \big(x(t),\ y(t),\ z(t) \big).$$

$$\big(x, y, z \in C^1[\alpha, \beta] \big)$$



Vi sätter

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big\{ P(\vec{r}(t)) \cdot x'(t) + Q(\vec{r}(t)) \cdot y'(t) + R(\vec{r}(t)) \cdot z'(t) \Big\}\, dt$$

kurvintegral av $\vec{F}$ längs γ.

A.J

Ex.: Om $\vec{F} = (3, -y, 2x)$

och $\gamma = \{(t, t^2, t^3) : 0 \leq t \leq 1\}$

fås

$$\int_\gamma \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_0^1 \{t^3 \cdot 1 + (-t^2) \cdot 2t + 2t \cdot 3t^2\} dt$$
$$= \int_0^1 \{t^3 - 2t^3 + 6t^2\} dt$$
$$= \int_0^1 5t^3 dt = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}.$$

Obs: Om $\vec{F} = \text{grad}\, u$ för någon $u \in C^1(\Omega)$ så ger kedjeregeln att

$$\frac{d}{dt}\left[u(\vec{r}(t))\right] = \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{r}(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}(\vec{r}(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial u}{\partial z}(\vec{r}(t)) \cdot z'(t)$$

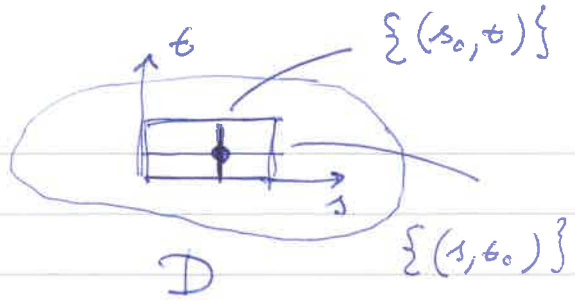
$$= P \cdot x'(t) + Q \cdot y'(t) + R \cdot z'(t)$$

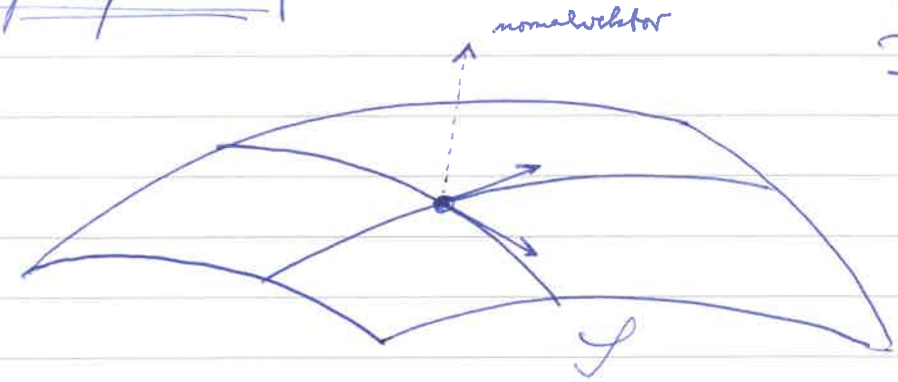
så att

$$\int_\gamma \vec{F} \circ d\vec{r} = u(\vec{b}) - u(\vec{a})$$

gäller för konservativa fält i $\mathbb{R}^3$.

Ytor på parameterform





En yta på parameterform är

$$S = \{ \vec{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) : (s,t) \in D \}$$

där $x, y, z \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

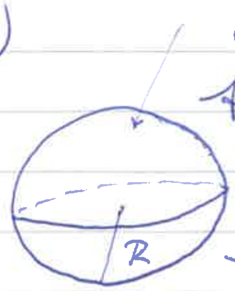
Exempel 1: $\begin{cases} x(s,t) = s \\ y(s,t) = t \\ z(s,t) = f(s,t) \end{cases}$

▷ ytan ges av graf av fkn av två variabler

Ex. 2: (Ej graf av en enda fkn)

$$\begin{cases} x = R \sin\theta \cos\varphi \\ y = R \sin\theta \sin\varphi \\ z = R \cos\theta \end{cases}$$

$0 \le \theta \le \pi$
$0 \le \varphi \le 2\pi$

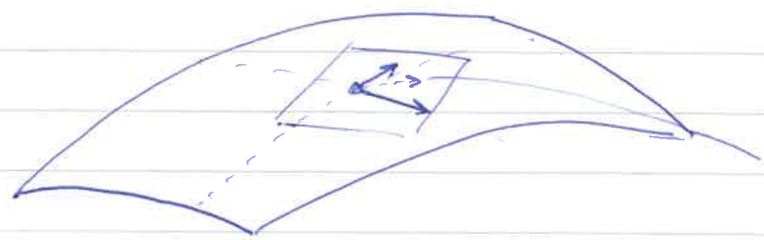


Af.

Tangentrummet

Def: Tangentrummet till $\mathcal{S}$ i $(\vec{r}(s_0, t_0))$ är vektorrummet

$$\operatorname{span}\left\{ \vec{r}\,'_s(s_0,t_0),\ r'_t(s_0,t_0) \right\}$$

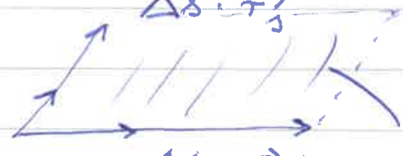


Här är

$$\vec{r}\,'_s(s,t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(s+h,t) - \vec{r}(s,t)}{h}$$

och motsvarande för $\vec{r}\,'_t$.

Area av skalning av liten bit av tangentplan: linjär algebra ger



area $\left| \vec{r}\,'_s \cdot \Delta s \times \vec{r}\,'_t \cdot \Delta t \right|$

$$= \left| \vec{r}\,'_s \times \vec{r}\,'_t \right| \Delta s\, \Delta t$$

Motiverar följande def.
Area av yta på parameterform

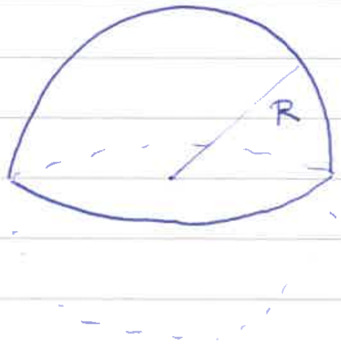
$$A(\mathcal{S}) = \iint_D \left| \vec{r}\,'_s \times \vec{r}\,'_t \right| ds\,dt$$

▷ Variabelbyte i dubbelintegral ger: $A(\mathcal{S})$ beror ej av val av parametrisering.

A.J.

Ex.: Area av halvsfär

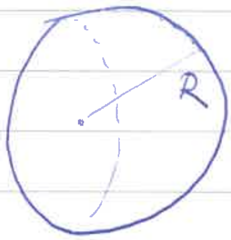
S_1:



$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

vi väljer denna variant

S_2:



$0 \leq \varphi \leq \pi$

I sfäriska koordinater:

$$\vec{r} = (R \sin\theta \cos\varphi, R \sin\theta \sin\varphi, R\cos\theta)$$

Detta ger

$$\vec{r}_\theta' = (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, -R\sin\theta)$$

$$\vec{r}_\varphi' = (-R\sin\theta\sin\varphi, R\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

Vi får

$$\vec{r}_\theta' \times \vec{r}_\varphi' = R^2 \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= R^2\Big(0-(-\sin^2\theta\cos\varphi),\ (-\sin\theta)(-\sin\theta\sin\varphi)-0,\ \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\varphi\cdot(-\sin\theta\sin\varphi)\Big)$$

$$= R^2\left(\sin^2\theta\cos\varphi,\ \sin^2\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\theta\right)$$

$$\Big(= \underbrace{R\sin\theta}_{\geq 0}\cdot\vec{r}(\theta,\varphi)\Big)$$

Beräkna normen

$$|\vec{r}\,'_\theta\times\vec{r}\,'_\varphi| = R^2\left\{\sin^4\theta\cos^2\varphi+\sin^4\theta\sin^2\varphi+\sin^2\theta\cos^2\theta\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= R^2\left\{\sin^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= R^2\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

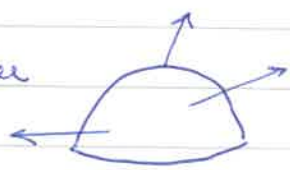
$$= R^2\sin\theta$$

Slutligen

$$A(S) = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 2\pi R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta$$

$$= 2\pi R^2.$$

Obs: $\vec{n} = \vec{r}\,'_s\times\vec{r}\,'_t$ pekar utåt i detta fall



positiv orientering.