SAMMANFATTNING FÖRELÄSNING 14

ALAN SOLA

Denna fjortonde föreläsning handlade om potensserier, deras kopplingar till analytiska funktioner, samt tillämpningar på ordinära differentialekvationer.

Vi påminde oss först om satsen som utsäger att en potensserie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)$ antingen konvergerar endast i $z = z_0$, eller i en skiva $\{|z - z_0| < R\} \subset \mathbb{C}$ där $R > 0$, eller också för alla komplexa z. Talet $R > 0$ kallas för seriens *konvergensradie*. Om en potensserie har positiv konvergensradie är serien absolutkonvergent och likformigt konvergent på varje strikt mindre skiva. Detta har som konsekvens att summan av en konvergent potensserie är en funktion av klass C^∞, samt att man vid integration eller derivering av summan av en konvergent potensserie kan utföra dessa operationer term för term.

Vi använde dessa kunskaper för att formulera och bevisa den viktiga satsen att en analytisk (i meningen komplext deriverbar) funktion lokalt ges som summan av en konvergent potensserie. Således är varje en gång komplext deriverbar funktion i själva verket godtyckligt många gånger deriverbar. Beviset för satsen byggde på att man i Cauchys integralformel utvecklar $1/(\zeta - z)$ i en konvergent potensserie, och använder likformig konvergens för att byta plats på integration och summation.

Avslutningsvis diskuterade vi hur potensserier kan användas för att lösa differentialekvationer. Idén är att först anta att lösningen till en differentialekvation ges som summan av en konvergent potensserie, för att sedan derivera termvis och använda differentialekvationen för att erhålla villkor på potensseriekoefficienterna. När dessa väl har bestämts återstår att undersöka huruvida den resulterande potensserien verkligen har positiv konvergensradie Vi illustrerade detta förfarande genom att lösa det enkla exemplet $u'(x) - u(x) = 0$ med begynnelsevillkor $u(0) = 1$.

Department of Mathematics, Stockholm University, 106 91 Stockholm, Sweden.
Email address: `sola@math.su.se`