MM2002 Tenta 2022-12-19

1 (a) $f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x}{1+x^2}} \quad \dfrac{1\cdot(1+x^2) - x\,2x}{(1+x^2)^2}$

$$= \frac{1+x^2}{x} \quad \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{x\,(1+x^2)}$$

(b) Volymen $= \pi \int_0^1 g^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 \left(x\, e^{\frac{x}{2}}\right)^2 dx$

$$= \pi \int_0^1 x^2 e^x\,dx \underset{\text{part. int.}}{=} \pi \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \pi \int_0^1 2x e^x\,dx$$

part. int.
$u(x) = e^x \quad v(x) = x^2$
$u'(x) = e^x \quad v'(x) = 2x$

$$\underset{\text{part. Int.}}{=} \pi \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \pi \left[2x e^x\right]_0^1 + \pi \int_0^1 2 e^x\,dx$$

part. Int.
$u(x) = e^x \quad v(x) = 2x$
$u'(x) = e^x \quad v'(x) = 2$

$$= \pi e - \pi 2 e + \pi \left[2 e^x\right]_0^1 = \pi\left(e - 2e + 2e - 2\right)$$

$$= \underline{\underline{\pi\,(e-2)}}.$$

(2) $\det M = -\alpha \cdot 1 \cdot 1 + 3\alpha^2 = \alpha(3\alpha - 1)$.

Nollställen: $\alpha = 0$ samt $\alpha = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ M inverterbar för alla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}$.

Gauss-Jordan:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-\alpha) & (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$$

Fall $\alpha \neq 0$:

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1/\alpha^2 \\ 0 & \alpha & 3 \end{pmatrix} (-\alpha)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1/\alpha^2 \\ 0 & 0 & 3 - \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{trappstegsform}$$

Fall $\alpha = 0$:

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (-3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{trappstegsform}$$

(3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{3e^x}{2\cos x - \sin x} = \frac{3e^0}{2\cos 0 - \sin 0} = \frac{3}{2},$$

då täljarens och nämnarens GV existerar separat och nämnarens GV är nollskilt.

$$\sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{x\sqrt{1-1/x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

$$= \sqrt{x}\,\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty,$$

då $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$, dvs. bråket går mot 1 och $\sqrt{x} \to +\infty$.

4 (a) f är deriverbar i alla punkter förutom där $x^2-1=0$, d.v.s. i $x=\pm 1$. Vi har

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{om } x<-1, \\ 1-x^2 & \text{om } -1\le x\le 1, \\ x^2-1 & \text{om } x>1, \end{cases}$$

därför

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{om } x<-1, \\ -2x & \text{om } -1<x<1, \\ 2x & \text{om } x>1. \end{cases}$$

Derivatans enda nollställe är alltså $x=0$.

3 kandidater för lokala extrempunkter: $x=-1, 0, 1$.

Vi har $f(-1) = 0 = f(1)$, och då $f(x)\geq 0 \ \forall x$, har f lokala minimipunkter i $x=-1$, $x=1$.

För x nära 0 är $f'(x) = -2x \begin{cases} <0 & \text{för } x>0, \\ >0 & \text{för } x<0, \end{cases}$

därför har f i $x=0$ ett lokalt maximum.

(b)

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{om } x<-1, \\ -2 & \text{om } -1<x<1, \\ 2 & \text{om } x>1. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f konvex på $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,
konkav på $(-1,1)$.

(c) Nej, då för $x>1$ $f(x) = x^2-1 \to +\infty$ för $x\to+\infty$.

⑤ (a) $5e_1 - e_3 = 5e_1 + 0e_2 - 1e_3$

$\Rightarrow$ har koordinater $(5, 0, -1)$.

(b) Definitionsenligt, betrakta ekvationssystemet

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} = \lambda_1 (e_1 + 2e_3) + \lambda_2 \left(\tfrac{1}{2} e_1 + 2e_2 + 3e_3\right) + \lambda_3 (e_1 + e_2 + 3e_3)$$

$$= \left(\lambda_1 + \tfrac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_3\right) e_1 + (2\lambda_2 + \lambda_3) e_2 + (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3) e_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \tfrac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

då (e_1, e_2, e_3) linjärt oberoende.

Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{-2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Trappstegsformen har en kolonn utan pivotelement $\Rightarrow$ oändligt många lösningar $\Rightarrow$ (f_1, f_2, f_3) linjärt beroende.

(c) Med kryssprodukt (i koordinater med avseende på $\mathbb{B}$)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \\ -1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

⑥ Homogena DE:n $y''-7y'+12y=0$ har karakt. ekvation

$$r^2-7r+12=0$$

$$\Rightarrow \quad r=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-12}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\begin{cases}4\\3\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_h(x)=C_1e^{4x}+C_2e^{3x}, \qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

allmänna lösningen till den homogena DE:n.

Ansats för en partikulärlösning till $y''-7y'+12y=\cos(3x)$:

$$y_p(x)=A\cos(3x)+B\sin(3x),$$

$$y_p'(x)=-3A\sin(3x)+3B\cos(3x),$$

$$y_p''(x)=-9A\cos(3x)-9B\sin(3x),$$

därför vill vi ha A,B sådana att

$$\cos(3x)\overset{!}{=}-9A\cos(3x)-9B\sin(3x)$$
$$-7(-3A\sin(3x)+3B\cos(3x))$$
$$+12(A\cos(3x)+B\sin(3x))$$
$$=\underbrace{(-9A-21B+12A)}_{=3A-21B}\cos(3x)+\underbrace{(-9B+21A+12B)}_{=21A+3B}\sin(3x)$$

Jämför: $\begin{cases}3A-21B=1\\21A+3B=0\end{cases}$ Lösningar: $A=\frac{1}{150}$, $B=-\frac{7}{150}$

$$\Rightarrow \quad y_p(x)=\frac{1}{150}(\cos(3x)-7\sin(3x)).$$

Allm. lösn.: $y(x)=C_1e^{4x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{150}(\cos(3x)-7\sin(3x))$