Tentamensskrivning i
Algebra, Matematik I, 7.5 hp
den 9 januari 2023

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Max | 30 p | B | 24 p | D | 18 p |
| A | 27 p | C | 21 p | E | 15 p |

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. (a) Bestäm samtliga par $(X, Y)$ av mängder $X$ och $Y$ som uppfyller de tre kraven (2p)

$$X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad X \cap Y = \{2,3,4\}, \quad 1 \in X.$$

(b) Beräkna (3p)

$$\sum_{k=1}^{100} \left(3^k + 2k - 1\right).$$

(Om du undrar över hur svaret bör se ut: det får endast innehålla heltal och de fyra vanliga räknesättens symboler, samt potenser, och ska bestå av sammanlagt högst 20 symboler. Jättestora tal behöver ej beräknas uttryckligen.)

2. (a) Lös olikheten (2p)

$$\frac{2}{2x-1} < \frac{1}{x+3}.$$

(b) Bestäm samtliga nollställen till polynomet $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$, samt faktorisera $p(x)$ så långt som möjligt i reella faktorer. Tips: polynomet kanske har något rationellt nollställe. (3p)

3. (a) Låt $z$ vara det komplexa talet $z = 2^{\frac{1}{30}-1}\left(\sqrt{3}+i\right)$. Beräkna $z^{60}$. Det slutliga svaret ska anges på rektangulär/kartesisk form. (3p)
(Tips: försök *inte* använda binomialsatsen för detta.)

(b) Visa, med hjälp av binomialsatsen, att (2p)

$$\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} (-1)^k = 0.$$

Ledning: $(-1)^k = (-1)^k \cdot 1^m$ för vilket heltal $m$ som helst.

Var god vänd!

4. För varje reell parameter $a$ fås ett ekvationssystem (5p)

$$\begin{cases} x + ay + 3z &= 14 \\ x + \phantom{a}y + 6z &= 11 \\ \phantom{x+}-4y + az &= -4. \end{cases}$$

Bestäm, för varje värde på $a$, antalet lösningar till detta ekvationssystem.

5. (Obs: Del (c) av denna fråga går att besvara utan ha svarat på (a) eller (b).)
De två linjerna

$$\begin{aligned} L_1 &: (x,y,z) = (1,2,3) + t(1,1,1), \quad t \in \mathbb{R} \\ L_2 &: (x,y,z) = (5,8,6) + s(1,-1,2), \quad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

skär varandra i en punkt.

(a) Bestäm punkten där $L_1$ och $L_2$ skär varandra. (1p)

(b) Bestäm en ekvation på normalform för det plan som innehåller både $L_1$ och $L_2$. (2p)

(c) Det finns två plan med egenskapen att varje punkt på planen har (vinkelrätt) avstånd 1 till planet med ekvation $3x - y - 2z = 0$. Ange en ekvation (på normalform) för ett sådant plan. (2p)

6. Avbildningen $T$ har matrisen (5p)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i planets standardbas. Låt $\vec{f_1} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ och $\vec{f_2} = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. Visa att $\mathcal{F} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ är en ON-bas för planet, bestäm matrisen för $T$ relativt denna bas, samt ge en geometrisk tolkning för avbildningen $T$.