MM2002 Tenta 2023-01-19

① (a) $f'(x) = 1 \cdot e^{\sqrt{x^3}} + x \frac{d}{dx} e^{\sqrt{x^3}}$

$$= e^{\sqrt{x^3}} + x\, e^{\sqrt{x^3}} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}$$

$$= \left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{x^3}\right) e^{\sqrt{x^3}}.$$

(b) Volymen $= \pi \int_0^2 g(x)^2\, dx = \pi \int_0^2 \frac{1}{(x+2)(x+4)}\, dx.$

Partialbråksuppdela:

$$\frac{1}{(x+2)(x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4} = \frac{(A+B)x + 4A + 2B}{(x+2)(x+4)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 & \Rightarrow B = -A \\ 4A + 2B = 1 & \Rightarrow 4A - 2A = 1 \Leftrightarrow \underline{A = \frac{1}{2}}, \end{cases}$$

$\underline{B = -\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \text{Volymen} = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2(x+2)} - \frac{1}{2(x+4)} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \Big[\ln|x+2| - \ln|x+4| \Big]_0^2$$

$$= \frac{\pi}{2} \Big(\underbrace{\ln 4}_{= 2\ln 2} - \ln 6 - \ln 2 + \ln 4 \Big)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(3 \ln 2 - \ln 6 \right) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{3}.$$

(2) Entydig lösning om och endast om $\det A \neq 0$.

$\det A = a(a+4)$, nollställen $0, -4$.

$\Rightarrow$ entydig lösning för alla $a \neq 0, -4$.

<u>Fall $a = 0$:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{6}{\leftarrow} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Trappstegsform

3 kolonner, 2 pivotelement $\Rightarrow$ oändligt många lösningar

<u>Fall $a = -4$:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{-2}{\leftarrow} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}}{\leftarrow}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3 kolonner, 2 pivotelement $\Rightarrow$ oändligt många lösningar.

③ $$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x}\cos x = \lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\frac{\cos x}{x}.$$

Vi har

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0_+}\frac{\sin t}{t} = 1$$

och

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x} = 0,$$

då $\frac{1}{x}\to 0$ och $|\cos x| \le 1 \ \forall x$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}\cos x = 1\cdot 0 = \underline{\underline{0.}}$$

För det andra gränsvärdet går båda nämnare mot noll där $x\to -1$. Polynomdivision ger

$$\frac{x^2-5x-2}{x^3-x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2-5x-2}{(x+1)(x^2-2x+1)} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{x^2-5x-2-(x^2-2x+1)}{(x+1)(x^2-2x+1)}$$

$$= \frac{-3x-3}{(x+1)(x^2-2x+1)} = \frac{-3}{x^2-2x+1}$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{\frac{-3}{4}}} \quad \text{där } x\to -1.$$

④ (a) $f'(x) = \dfrac{2x(x+3)-(x^2-4)\cdot 1}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2+6x+4}{(x+3)^2}$,

$f'(x) = 0 \iff x^2+6x+4 = 0$

$\iff x = -3 \pm \sqrt{5}$

Särskilt $f'(x) = \dfrac{(x-(-3-\sqrt{5}))(x-(-3+\sqrt{5}))}{(x+3)^2}$.

Teckentabell:

x		$-3-\sqrt{5}$		-3		$-3+\sqrt{5}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\}$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max $\approx -10{,}5$	$\searrow$	$\}$	$\searrow$	min $\approx -1{,}5$	$\nearrow$

$\rightarrow$ lokalt max. i $x = -3-\sqrt{5}$, lokalt min. i $x = -3+\sqrt{5}$

(b) $f(x) = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$

$\rightsquigarrow$ nollställen $x = \pm 2$

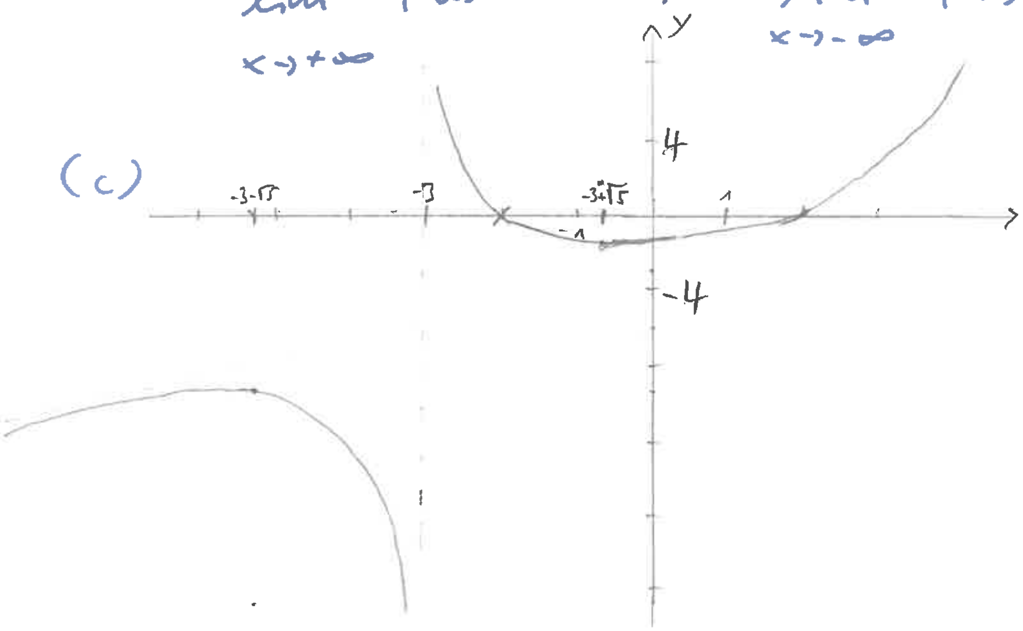
Gränsvärden: Polynomdivision ger $f(x) = x - 3 + \dfrac{5}{x+3}$, därför

$\lim\limits_{x \to -3_-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -3_+} f(x) = +\infty$,

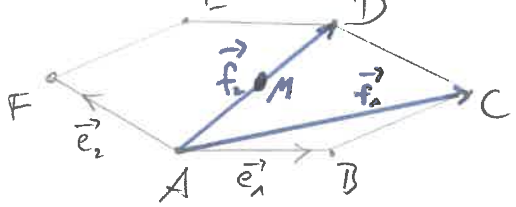
dessutom ~~gäller~~

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

(c)



⑤ Skiss



(a) $\vec{e_2} = \overline{CD} = -\vec{f_1} + \vec{f_2}$.

Inför man mittpunkten M, så är $\frac{1}{2}\vec{f_2} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \overline{AM}$ och

$\vec{e_1} + \vec{e_2} = \overline{AM}$.

Detta leder till

$$\begin{cases} \vec{e_2} = -\vec{f_1} + \vec{f_2}, \\ \vec{e_1} + \vec{e_2} = \frac{1}{2}\vec{f_2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\vec{f_2} = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2}}$ och

$\vec{e_2} = -\vec{f_1} + 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} \iff \underline{\vec{f_1} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2}}$.

(b) $\vec{u}_{\mathcal{B}} = (2, -2)$ i basen $\mathcal{B} = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ betyder

$\vec{u} = 2\vec{f_1} - 2\vec{f_2} = 4\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 4\vec{e_1} - 4\vec{e_2} = -2\vec{e_2}$.

$\Rightarrow$ $\vec{u}$ har koordinater $(0, -2)$ i basen $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.

⑥ (a) $yy' + \frac{1}{x^2} = 0 \iff yy' = -\frac{1}{x^2}$

$$\overset{\text{separabel}}{\iff} \int y\,dy = -\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\iff \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{x} + C$$

$$\iff y = \pm\sqrt{\frac{2}{x} + 2C}$$

Begynnelsevärde: $y(1) = -4$ ger

$$-4 = -\sqrt{\frac{2}{1} + 2C} \iff 16 = 2 + 2C$$

minus krävs

$$\iff \underline{7 = C}$$

$\Rightarrow$ Begynnelsevärdesproblemet har lösningen

$$\underline{\underline{y = -\sqrt{\frac{2}{x} + 14}}}$$

(b) $y'' + 5y' - 14y = 0$ har den karakt. ekv.

$$\lambda^2 + 5\lambda - 14 = 0 \iff \lambda = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{56}{4}}$$

$$= \begin{cases} 2 \\ -7 \end{cases}$$

$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-7x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$

är den allmänna lösningen.