MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
14 mars 2023

15p ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

Påminnelse. Kom ihåg att om $\mathbb{F}$ är en kropp så skriver vi

- $\mathrm{P}_n(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av polynom av grad högst n med koefficienter i $\mathbb{F}$ och
- $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ för $\mathbb{F}$-vektorrummet av $m \times n$-matriser med element i $\mathbb{F}$.

Uppgifter.

1. (a) **(1p)** Låt $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ vara en delmängd av ett vektorrum V. Ange definitionen av $\operatorname{span}(S)$ och definitionen av att delmängden S *spänner upp* V.

   (b) **(2p)** Låt W också vara ett vektorrum. Visa att om en linjär avbildning $T : V \to W$ är surjektiv och $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ spänner upp V, då spänner $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ upp W.

   (c) **(2p)** Låt $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ vara den linjära avbildningen som avbildar ett polynom p på

   $$T(p) = 2(1-x)p(x) + (x^3-1)p''(0).$$

   Bestäm en så liten mängd som möjligt som spänner upp bildrummet $R(T)$.

2. (a) **(2p)** Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett F-vektorrum V. Ange definitionerna av begreppen *egenvektor* och *egenvärde* för T, samt vad det betyder för T att vara *diagonaliserbar*.

   (b) **(3p)** Låt $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ vara den linjära avbildningen som ges av

   $$T(z_1, z_2, z_3) = (4z_1 - 2z_2 - z_3,\ 2z_2 - z_3,\ z_2)\,.$$

   Beräkna alla egenvärden för T och baser för de tillhörande egenrummen, samt avgör om T är diagonaliserbar.

3. Betrakta $\mathbb{R}^4$ med dess sedvanliga inre produkt, och låt

   $$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix}.$$

   Låt U vara delrummet av $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av v_1, v_2, v_3.

   (a) **(3p)** Bestäm en ON-bas för U.

   (b) **(2p)** Beräkna den ortogonala projektionen $P_U(w)$ (skrivs också $\operatorname{proj}_U(w)$) av vektorn w på U, samt det minsta avståndet mellan w och U (dvs det minsta värdet av $\|w-u\|$ för $u \in U$).

4. (a) **(1p)** Ange definitionen av en *normal* matris, samt definitionen av en *självadjungerad* matris.

   (b) **(4p)** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Bestäm för vilka tal $a, b \in \mathbb{C}$ det finns en ON-bas av $\mathbb{C}^3$ bestående av egenvektorer för A, samt för vilka tal $a, b \in \mathbb{R}$ det finns en ON-bas av $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer för A. (I båda fallen använder vi de sedvanliga inre produkterna.)

5. (a) **(1p)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan ändligtdimensionella inre produktrum V och W. Ange en definition av T:s *nollskilda singulärvärden*. Obs: vilken som helst av de olika ekvivalenta definitionerna går bra.

   (b) **(4p)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

6. Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan ändligtdimensionella vektorrum V och W.

   (a) **(1p)** Låt B, B' vara ordnade baser för V, och låt C, C' vara ordnade baser för W. Formulera satsen om basbyte för linjära avbildningar, dvs ange relationen mellan $[T]_{B'}^{C'}$ och $[T]_B^C$ i termer av basbytesmatriserna mellan B och B' och mellan C och C'.

   (b) **(3p)** Visa att T bestäms helt av dess värden på en bas $B = (v_1, \ldots, v_n)$ för V, dvs att om $L : V \to W$ också är linjär och $T(v_i) = L(v_i)$ för $i = 1, \ldots, n$, då är $L(v) = T(v)$ för alla $v \in V$.

   (c) **(1p)** Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara den linjära avbildningen som uppfyller att $T(1, 1) = 1$ och $T(1, -1) = 3$. Bestäm $T(9, -5)$.

Rättningen av tentan kommer att vara färdig ungefär 2 veckor efter tentamensskrivning. Därefter kan en elektronisk kopia av tentan beställas från studentexpeditionen genom länken `https://survey.su.se/Survey/48245/sv`.