MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
14 mars 2023

Lösningsförslag

1. (a) **(1p)** Låt $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ vara en delmängd av ett vektorrum V. Ange definitionen av $\mathrm{span}(S)$ och definitionen av att delmängden S *spänner upp* V.

   (b) **(2p)** Låt W också vara ett vektorrum. Visa att om en linjär avbildning $T : V \to W$ är surjektiv och $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ spänner upp V, då spänner $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ upp W.

   (c) **(2p)** Låt $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ vara den linjära avbildningen som avbildar ett polynom p på

$$T(p) = 2(1-x)p(x) + (x^3 - 1)p''(0).$$

   Bestäm en så liten mängd som möjligt som spänner upp bildrummet $R(T)$.

Lösning

(a) Om V är ett vektorrum över F, så är $\mathrm{span}(S) = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n : a_1, a_2, \ldots, a_n \in F\}$, och att S spänner upp V betyder att $\mathrm{span}(S) = V$.

(b) Vi behöver visa att varje vektor i W kan skrivas som en linjärkombination av $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$. För att se detta, låt $w \in W$ vara en godtycklig vektor. Eftersom T är surjektiv så finns det en vektor $v \in V$ sådan att $T(v) = w$. Eftersom $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ spänner upp V så finns det skalärer $a_i \in F$ sådana att $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Alltså är

$$w = T(v) = T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n),$$

eftersom T är linjär. Alltså spänner $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ upp W.

(c) Bildrummet $R(T)$ spänns upp av vektorerna $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$ för vilka vektorer v_1, v_2, v_3 som helst som spänner upp $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$. Vi tar vektorerna 1, x, x^2 (som spänner upp $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$) och beräknar:

$$\begin{aligned} T(1) &= 2(1-x) \\ T(x) &= 2(1-x)x = 2(x - x^2) \\ T(x^2) &= 2(1-x)x^2 + (x^3 - 1) \cdot 2 = 2(x^2 - 1). \end{aligned}$$

Alltså spänns $R(T)$ upp av mängden $\{1 - x,\ x - x^2,\ x^2 - 1\}$. Denna mängd är dock inte så liten som möjlig: t.ex. är $x^2 - 1 = -(x - x^2) - (1 - x)$, så

$$R(T) = \mathrm{span}(\{1 - x,\ x - x^2\}).$$

Mängden här är nu så liten som möjlig: ingen av de två vektorerna spänns upp av den andra.

Svar: $\{1 - x,\ x - x^2\}$ (t.ex.)

2. (a) **(2p)** Låt $T : V \to V$ vara en linjär operator på ett F-vektorrum V. Ange definitionerna av begreppen *egenvektor* och *egenvärde* för T, samt vad det betyder för T att vara *diagonaliserbar.*

   (b) **(3p)** Låt $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ vara den linjära avbildningen som ges av

$$T(z_1, z_2, z_3) = (4z_1 - 2z_2 - z_3,\ 2z_2 - z_3,\ z_2)\,.$$

   Beräkna alla egenvärden för T och baser för de tillhörande egenrummen, samt avgör om T är diagonaliserbar.

Lösning

(a) En vektor $v \in V$ kallas en egenvektor för T med egenvärde $\lambda \in F$ om $v \neq 0_V$ och $T(v) = \lambda\, v$. Avbildningen T kallas diagonaliserbar om det finns en bas för V bestående av egenvektorer för T. Ekvivalent: om det finns en bas B för V sådan att matrisen $[T]_B^B$ är en diagonalmatris.

(b) Avbildningen T kan i matrisform skrivas som $T(z) = Az$ där A är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi vet att T och A har samma egenvärden och egenvektorer, och att egenvärdena för A precis motsvarar rötterna till det karaktäristiska polynomet

$$\begin{vmatrix} 4-t & -2 & -1 \\ 0 & 2-t & -1 \\ 0 & 1 & -t \end{vmatrix} = (4-t)\begin{vmatrix} 2-t & -1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = (4-t)\big((2-t)(-t)+1\big) = (4-t)(t-1)^2.$$

Alltså är egenvärdena 4 och 1 (med algebraisk multiplicitet två). Vi beräknar nu de motsvarande egenrummen:

$\mathbf{E_4}$: Egenrummet till egenvärdet 4 är precis nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$E_4 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{E_1}$: Egenrummet till egenvärdet 1 är precis nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså är

$$E_1 = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom det inte finns tre linjärt oberoende egenvektorer för T, så är T inte diagonaliserbar.

Svar: Egenrummet för egenvärdet 4 har bas $\{(1,0,0)\}$, och egenrummet för egenvärdet 1 har bas $\{(1,1,1)\}$. T är inte diagonaliserbar.

3. Betrakta $\mathbb{R}^4$ med dess sedvanliga inre produkt, och låt

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Låt U vara delrummet av $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av v_1, v_2, v_3.

(a) **(3p)** Bestäm en ON-bas för U.

(b) **(2p)** Beräkna den ortogonala projektionen $P_U(w)$ (skrivs också $\mathrm{proj}_U(w)$) av vektorn w på U, samt det minsta avståndet mellan w och U (dvs det minsta värdet av $\|w - u\|$ för $u \in U$).

Lösning

(a) Vi använder Gram–Schmidts metod för detta. Först låter vi

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi tar sedan nästa vektor u_2 som

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och sedan u_3 som

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 - \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dessa tre vektorer u_1, u_2, u_3 utgör då en ON-bas för U.

Svar: (u_1, u_2, u_3) där u_1, u_2, u_3 är som ovan.

(b) Eftersom (u_1, u_2, u_3) är en ON-bas har vi, enligt känd sats från kursen, att

$$P_U(w) = \langle w, u_1 \rangle u_1 + \langle w, u_2 \rangle u_2 + \langle w, u_3 \rangle u_3 = 10 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 - 4 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Denna vektor är, enligt utlärd sats, den vektor i U som minimerar avståndet till w, så det minsta avståndet ges av

$$\|w - P_U(w)\| = \|(2, 4, 6, 8) - (3, 3, 7, 7)\| = \|(-1, 1, -1, 1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2.$$

Svar: $P_U(w) = (3, 3, 7, 7)$, och det minsta avståndet är 2.

4. (a) **(1p)** Ange definitionen av en *normal* matris, samt definitionen av en *självadjungerad* matris.
   (b) **(4p)** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm för vilka tal $a, b \in \mathbb{C}$ det finns en ON-bas av $\mathbb{C}^3$ bestående av egenvektorer för A, samt för vilka tal $a, b \in \mathbb{R}$ det finns en ON-bas av $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer för A. (I båda fallen använder vi de sedvanliga inre produkterna.)

Lösning

(a) En matris A kallas normal om A och A^* kommuterar, dvs om $A\,A^* = A^*A$, där A^* är konjugat-transponatet av A. En matris kallas självadjungerad om $A^* = A$.

(b) Enligt den komplexa spektralsatsen har $\mathbb{C}^3$ en ON-bas bestående av egenvektorer för A om och endast om A är normal. Per definition gäller det om och endast om $A\,A^* = A^*A$, så vi beräknar dessa matriser:

$$A\,A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{b} & 0 \\ \overline{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + |a|^2 & a + \overline{b} & 0 \\ \overline{a} + b & |b|^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & \overline{b} & 0 \\ \overline{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + |b|^2 & a + \overline{b} & 0 \\ \overline{a} + b & |a|^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dessa är lika, och A är därmed normal, om och endast om $|a| = |b|$.

För den andra delen av frågan: enligt den reella spektralsatsen har $\mathbb{R}^3$ en ON-bas bestående av egenvektorer för A om och endast om A är självadjungerad, vilket över $\mathbb{R}$ är ekvivalent med att vara symmetrisk. Detta gäller om och endast om $a = b$.

Svar: Det finns en ON-bas för $\mathbb{C}^3$ bestående av egenvektorer för A om och endast om $|a| = |b|$, och en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer för A om och endast om $a = b$.

5. (a) **(1p)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan ändligtdimensionella inre produktrum V och W. Ange en definition av T:s *nollskilda singulärvärden*. Obs: vilken som helst av de olika ekvivalenta definitionerna går bra.

   (b) **(4p)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}).$$

Lösning

(a) Enligt singulärvärdessatsen finns det ON-baser $(v_1, \dots, v_n)$ och $(w_1, \dots, w_m)$ för V respektive W, och unika reella tal $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, där $r = \mathrm{rang}(T)$, sådana att $T(v_i) = \sigma_i w_i$ för $i = 1, \dots, r$ och $T(v_j) = 0$ för $j > r$. Talen $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ kallas för T:s nollskilda singulärvärden.

(b) Vi söker, per definition, en faktorisering $A = U\,\Sigma\,V^*$ där U och V är ortogonala matriser och Σ har formen $\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, där $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$ är A:s singulärvärden.

Vi vet att de nollskilda singulärvärdena för A precis motsvarar kvadratrötterna ur de nollskilda egenvärdena till A^*A, så vi beräknar denna matris.

Vi har att

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

För att hitta egenvärdena beräknar vi det karateristiska polynomet $\det(A^*A - t\cdot I) = (9-t)^2 - 3^2 = (6-t)(12-t)$. Alltså är egenvärdena 6 och 12, och därmed är singulärvärdena $\sigma_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ och $\sigma_2 = \sqrt{6}$. Alltså ges matrisen Σ av

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För att hitta matrisen V beräknar vi egenvektorer för A^*A motsvarande egenvärdena 12 och 6.

För egenvärdet 12 subtraherar vi 12 från diagonalelementen och räknar ut nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nollrummet, och därmed egenrummet E_{12}, spänns alltså upp av vektorn $(1, 1)$, som vi normerar till

$$v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För egenvärdet 6 räknar vi liknande:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Här spänns egenrummet E_6 upp av vektorn $(1, -1)$, som vi normerar till

$$v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dessa två vektorer utgör kolonnerna av den eftersökta matrisen V, dvs

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Det sista steget är att hitta en matris U som uppfyller villkoren, vilket vi gör genom att bestämma dess kolonner u_1, u_2, u_3. För detta använder vi att $Av_i = \sigma_i u_i$ för $i = 1, 2$, dvs att $u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i$:

$$u_1 = \tfrac{1}{2\sqrt{3}} Av_1 = \tfrac{1}{2\sqrt{3}} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} Av_1 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom vi behöver en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av tre vektorer förlänger vi nu med en tredje normerad vektor ortogonal mot både u_1 och u_2, t.ex.

$$v_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dessa tre vektorer utgör kolonnerna av den ortogonala matrisen U:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Alltså har vi:

Svar: En singulärvärdesuppdelning ges av $A = U\,\Sigma\,V^*$, där

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan ändligtdimensionella vektorrum V och W.

(a) **(1p)** Låt B, B' vara ordnade baser för V, och låt C, C' vara ordnade baser för W. Formulera satsen om basbyte för linjära avbildningar, dvs ange relationen mellan $[T]_{B'}^{C'}$ och $[T]_B^C$ i termer av basbytesmatriserna mellan B och B' och mellan C och C'.

(b) **(3p)** Visa att T bestäms helt av dess värden på en bas $B = (v_1, \ldots, v_n)$ för V, dvs att om $L : V \to W$ också är linjär och $T(v_i) = L(v_i)$ för $i = 1, \ldots, n$, då är $L(v) = T(v)$ för alla $v \in V$.

(c) **(1p)** Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara den linjära avbildningen som uppfyller att $T(1, 1) = 1$ och $T(1, -1) = 3$. Bestäm $T(9, -5)$.

Lösning

(a) Relationen ges av att $[T]_{B'}^{C'} = [\mathrm{id}_W]_C^{C'}\, [T]_B^C\, [\mathrm{id}_V]_{B'}^B$, där $[\mathrm{id}_W]_C^{C'}$ är basbytesmatrisen från C till C' och $[\mathrm{id}_V]_{B'}^B$ är basbytesmatrisen från B' till B.

(b) Vi ska visa att om $B = (v_1, \ldots, v_n)$ är en bas för V och $L : V \to W$ är linjär med $T(v_i) = L(v_i)$ för $i = 1, \ldots, n$, då är $L(v) = T(v)$ för alla $v \in V$. För att se detta, låt $v \in V$ vara godtycklig. Eftersom B är en bas finns det skalärer $a_1, \ldots, a_n$ sådana att

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

Alltså är

$$\begin{aligned} L(v) &= L(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \\ &= a_1 L(v_1) + \cdots + a_n L(v_n) \\ &= a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n) \\ &= T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \\ &= T(v), \end{aligned}$$

där vi har använt linjäriteten hos både L och T, samt att $L(v_i) = T(v_i)$ för alla i. Alltså har vi visat att $L(v) = T(v)$ för alla $v \in V$.

(c) Vi kan uttrycka $(9, -5)$ som en kombination av $(1, 1)$ och $(1, -1)$, t.ex. genom att lösa systemet $x(1, 1) + y(1, -1) = (9, -5)$, dvs

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ x - y &= -5. \end{aligned}$$

Detta ger $x = 2$ och $y = 7$. Alltså är

$$T(9, -5) = T\big(2(1, 1) + 7(1, -1)\big) = 2\,T(1, 1) + 7\,T(1, -1) = 2 \cdot 1 + 7 \cdot 3 = 23.$$

Alternativt går det också bra att lägga märke till att den linjära avbildningen $L(x, y) = 2x - y$ uppfyller $L(1, 1) = 1$ och $L(1, -1) = 3$, och sedan använda del (b): eftersom T och L överensstämmer på en bas för $\mathbb{R}^2$, så stämmer de överens på hela $\mathbb{R}^2$. Så $T(9, -5) = L(9, -5) = 2 \cdot 9 - (-5) = 23$.

Svar: $T(9, -5) = 23$