Matematik II Analys del B, Andra mötet vårterminen 2023

Alan Sola

Denna vecka:

- Trippel-och högredimensionella multipelintegraler.
- Kurvor på parameterform.
- Kurvintegraler.

Multipelintegraler

Multipelintegraler

- Definition av multipelintegraler med hjälp av *trappfunktioner*

Multipelintegraler

- Definition av multipelintegraler med hjälp av *trappfunktioner* —viktig teoretisk synvinkel, men inte så integraler räknas ut i praktiken.

Multipelintegraler

- Definition av multipelintegraler med hjälp av *trappfunktioner* —viktig teoretisk synvinkel, men inte så integraler räknas ut i praktiken.
- Praktisk beräkning av multipelintegraler via *itererade integraler*.

Multipelintegraler

- Definition av multipelintegraler med hjälp av *trappfunktioner* —viktig teoretisk synvinkel, men inte så integraler räknas ut i praktiken.
- Praktisk beräkning av multipelintegraler via *itererade integraler*.
- I flera variabler finns ofta flera valmöjligheter: integrera först med avseende på z, sedan y, sedan x,

Multipelintegraler

- Definition av multipelintegraler med hjälp av *trappfunktioner* —viktig teoretisk synvinkel, men inte så integraler räknas ut i praktiken.
- Praktisk beräkning av multipelintegraler via *itererade integraler*.
- I flera variabler finns ofta flera valmöjligheter: integrera först med avseende på z, sedan y, sedan x, eller med avseende på y, sedan z, sedan x, osv.

Multipelintegraler

- Definition av multipelintegraler med hjälp av *trappfunktioner* —viktig teoretisk synvinkel, men inte så integraler räknas ut i praktiken.
- Praktisk beräkning av multipelintegraler via *itererade integraler*.
- I flera variabler finns ofta flera valmöjligheter: integrera först med avseende på z, sedan y, sedan x, eller med avseende på y, sedan z, sedan x, osv.
- Övning eller utseendet hos integrationsområdet leder fram till enklast integrationsordning.

Områden i högre dimension

Områden i högre dimension

- Integrationsområden inte alltid helt lätta att bestämma eller visualisera.

Områden i högre dimension

- Integrationsområden inte alltid helt lätta att bestämma eller visualisera.
- Bra att kunna känna igen och hantera *kvadratiska ytor*.

Områden i högre dimension

- Integrationsområden inte alltid helt lätta att bestämma eller visualisera.
- Bra att kunna känna igen och hantera *kvadratiska ytor*.Allmän form

  $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Ix + J = 0$$

  men kan reduceras ner till ett antal standardytor.

Områden i högre dimension

- Integrationsområden inte alltid helt lätta att bestämma eller visualisera.
- Bra att kunna känna igen och hantera *kvadratiska ytor*.Allmän form

  $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Ix + J = 0$$

  men kan reduceras ner till ett antal standardytor.
- *ellipsoid* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Områden i högre dimension

- Integrationsområden inte alltid helt lätta att bestämma eller visualisera.
- Bra att kunna känna igen och hantera *kvadratiska ytor*.Allmän form

  $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Ix + J = 0$$

  men kan reduceras ner till ett antal standardytor.
- *ellipsoid* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- *enmantlad hyperboloid* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Områden i högre dimension

- Integrationsområden inte alltid helt lätta att bestämma eller visualisera.
- Bra att kunna känna igen och hantera *kvadratiska ytor*.Allmän form

  $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Ix + J = 0$$

  men kan reduceras ner till ett antal standardytor.
- *ellipsoid* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- *enmantlad hyperboloid* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- och så vidare.

Ofta är det fördelaktigt att införa *koordinatbyte*.

Ofta är det fördelaktigt att införa *koordinatbyte*.
Om integrationsområdet uppvisar sfärisk symmetri kan man med fördel välja

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta$$

Kom ihåg skalfaktorn som ges av *funktionaldeterminanten*.

Exempel:
Avgör för vilka $\alpha > 0$ den generaliserade trippelintegralen

$$\int_{\{x^2+y^2+z^2<4\}} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{2\alpha}}$$

konvergerar, och beräkna i dessa fall integralens värde.

En ny typ av integral: **kurvintegral av ett vektorfält längs med en parameterkurva**.

Kurvor på parameterform

Kan studeras i $\mathbb{R}^n$ men fokus på $\mathbb{R}^2$ just nu.

Kurvor på parameterform
Kan studeras i $\mathbb{R}^n$ men fokus på $\mathbb{R}^2$ just nu.
En *kurva på parameterform* är

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))\colon t \in [\alpha, \beta]\},$$

där $x(t), y(t)$ är åtminstone kontinuerliga funktioner.

- Vi antar normalt sett att $\mathbf{r}(t)$ har kontinuerligt deriverbara komponenter.

Kurvor på parameterform

Kan studeras i $\mathbb{R}^n$ men fokus på $\mathbb{R}^2$ just nu.

En *kurva på parameterform är*

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \colon t \in [\alpha, \beta]\},$$

där $x(t), y(t)$ är åtminstone kontinuerliga funktioner.

- Vi antar normalt sett att $\mathbf{r}(t)$ har kontinuerligt deriverbara komponenter. Ibland vill vi anta $x(t), y(t)$ av klass C^k.
- Sätt
$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Kurvor på parameterform

Kan studeras i $\mathbb{R}^n$ men fokus på $\mathbb{R}^2$ just nu.
En *kurva på parameterform är*

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))\colon t \in [\alpha, \beta]\},$$

där $x(t), y(t)$ är åtminstone kontinuerliga funktioner.

- Vi antar normalt sett att $\mathbf{r}(t)$ har kontinuerligt deriverbara komponenter. Ibland vill vi anta $x(t), y(t)$ av klass C^k.
- Sätt
  $$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t)).$$
  Detta är det man får från
  $$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h},$$
  om gränsvärdet existerar.

Exempel

Betrakta

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)), \quad 0 \le t \le \pi.$$

Exempel
Betrakta

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

beskriver en halvcirkel av radie 2, genomlupen moturs från $(1,0)$ till $(-1,0)$.

Exempel
Betrakta
$$\mathbf{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$
beskriver en halvcirkel av radie 2, genomlupen moturs från $(1, 0)$ till $(-1, 0)$. Koordinatfunktionerna av klass C^∞ här.

- Observera att kurvor på parameterform har en riktning given.

Exempel
Kurvan

$$\mathbf{r}(t) = (t, 2t)$$

är av klass C^1

Exempel
Kurvan

$$\mathbf{r}(t) = (t, 2t)$$

är av klass C^1 men om vi betraktar *omparametriseringen*

$$\phi(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + 2(s - \frac{1}{2})^2, & \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases}$$

Exempel
Kurvan

$$\mathbf{r}(t) = (t, 2t)$$

är av klass C^1 men om vi betraktar *omparametriseringen*

$$\phi(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + 2(s - \frac{1}{2})^2, & \frac{1}{2} < s \le 1 \end{cases}$$

och tittar på

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(\phi(s))$$

får vi en kontinuerlig framställning av samma geometriska objekt, men ej C^1, då $\phi'_+(1/2) = 0 \neq \phi'_-(1/2) = 1$.

Exempel
Kurvan

$$\mathbf{r}(t) = (t, 2t)$$

är av klass C^1 men om vi betraktar *omparametriseringen*

$$\phi(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + 2(s - \frac{1}{2})^2, & \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases}$$

och tittar på

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(\phi(s))$$

får vi en kontinuerlig framställning av samma geometriska objekt, men ej C^1, då $\phi'_+(1/2) = 0 \neq \phi'_-(1/2) = 1$.

- Omparametrisering kan skada kurvans regularitet—antag typiskt allt C^1: $\mathbf{r}(t)$ samt ϕ och ϕ^{-1}.

Kurvintegraler i planet

Antag $\gamma = \{\mathbf{r}(t) \colon \alpha \leq t \leq \beta\}$ med $\mathbf{r}'(t) \neq 0$.

Antag $\gamma = \{\mathbf{r}(t) \colon \alpha \leq t \leq \beta\}$ med $\mathbf{r}'(t) \neq 0$.
Vi definierar *båglängden* av ett kurvstycke som

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau, \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

- Viktig egenskap: båglängdselementet $ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$ är parameteroberoende.

Låt $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(x, y), Q(x, y))$ vara ett kontinuerligt *vektorfält*.

Låt $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(x, y), Q(x, y))$ vara ett kontinuerligt *vektorfält*.

- $\mathbf{F}$ helt enkelt en funktion $\mathbf{F}\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Låt γ vara en C^1-kurva med parameterframställning $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $\alpha \le t \le \beta$.

Definition

Vi kallar

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

för kurvintegralen av $\mathbf{F}$ längs γ.

Låt $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(x,y), Q(x,y))$ vara ett kontinuerligt *vektorfält*.

- $\mathbf{F}$ helt enkelt en funktion $\mathbf{F}\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Låt γ vara en C^1-kurva med parameterframställning $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$.

Definition

Vi kallar

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

för kurvintegralen av $\mathbf{F}$ längs γ.

Betecknas

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{eller} \quad \int_\gamma Pdx + Qdy.$$

Rent konkret har man att räkna ut envariabelintegralen

$$\int_\alpha^\beta \left[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right] dt.$$

- Viktig observation: kurvintegralens värde är oberoende av val av parametrisering av C^1-kurvan γ.

Exempel:
Låt $\mathbf{F} = (xy, y)$ och beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma_j} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

längs med γ_1, den räta linjen som förbinder $(0, 0)$ med $(0, 1)$, samt längs med γ_2, de andra sidorna i den rätvinkliga triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$.

Kommer att prata mer om *vägoberoende* och kurvintegraler längs *slutna enkla kurvor* framöver.