Exempel: Avgör för vilka $\alpha > 0$ den generaliserade trippelintegralen

$$\iiint_{\{x^2+y^2+z^2<4\}} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}\,dx\,dy\,dz$$

är konvergent, och beräkna i dessa fall integralens värde.

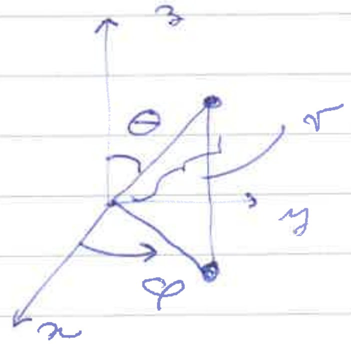
L.: Obs: integranden $(x^2+y^2+z^2)^{-\alpha}$ är positiv, vilket betyder att vi inte behöver oroa oss för ~~att~~ olika avskärningar kan leda till olika slutsatser.

Låt oss studera

$$\iiint_{\{\varepsilon^2<x^2+y^2+z^2<4\}} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Vi inför rymdpolära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



Funktionaldeterminanten blir

$$J(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta \qquad \text{(gör denna uträkning!)}$$

A.f.

Vi har gränserna

$$\varepsilon \leq r \leq 2$$
$$0 \leq \theta \leq \pi$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi .$$

Alltså:

$$\iiint\limits_{\{\varepsilon^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} \, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{r=\varepsilon}^{2} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{r^\alpha} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \cdot \int_\varepsilon^2 \frac{1}{r^{\alpha-2}} dr$$

$$= 2\pi \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \cdot \int_\varepsilon^2 \frac{1}{r^{\alpha-2}} dr$$

$$= 2\pi (1+1) \cdot \int_\varepsilon^2 \frac{1}{r^{\alpha-2}} dr$$

$$= 4\pi \int_\varepsilon^2 \frac{1}{r^{\alpha-2}} dr .$$

Den sista envariabelintegralen konvergerar precis när $\alpha - 2 < 1$ dvs. när $\alpha < 3$. I detta fall har vi

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^2 \frac{1}{r^{\alpha-2}} dr = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{3-\alpha} r^{3-\alpha}\right]_\varepsilon^2$$

$$= \frac{2^{3-\alpha}}{3-\alpha}$$

Alltså är $\displaystyle\iiint_{\{x^2+y^2+z^2<4\}} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{2\alpha}}\,dx\,dy\,dz$

konvergent precis när $\alpha < 3$, och har för sådana α värdet

$$\frac{4\pi\, 2^{3-\alpha}}{3-\alpha} \qquad (>0).$$