Matematik II Analys del B,
Tredje mötet vårterminen 2023

Alan Sola

Denna vecka:

- Greens formel i planet.
- Konservativa vektorfält och potentialer.

Förra gången:

Förra gången:
Kurvor i planet på parameterform

Förra gången:
Kurvor i planet på parameterform

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))\colon t \in [\alpha, \beta]\},$$

där $x(t), y(t)$ kan antas C^1.

Förra gången:
Kurvor i planet på parameterform

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))\colon t \in [\alpha, \beta]\},$$

där $x(t), y(t)$ kan antas C^1.
Vektorfält

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

där P, Q kan antas C^1.

Förra gången:
Kurvor i planet på parameterform

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))\colon t \in [\alpha, \beta]\},$$

där $x(t), y(t)$ kan antas C^1.
Vektorfält

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

där P, Q kan antas C^1.
Kurvintegral av F längs γ

Förra gången:
Kurvor i planet på parameterform

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \colon t \in [\alpha, \beta]\},$$

där $x(t), y(t)$ kan antas C^1.
Vektorfält

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

där P, Q kan antas C^1.
Kurvintegral av F längs γ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

för kurvintegralen av **F** längs γ.

Förra gången:
Kurvor i planet på parameterform

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))\colon t \in [\alpha, \beta]\},$$

där $x(t), y(t)$ kan antas C^1.
Vektorfält

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

där P, Q kan antas C^1.
Kurvintegral av F längs γ

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

för kurvintegralen av **F** längs γ.

Vi använder också notationen

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{eller} \quad \int_\gamma P dx + Q dy.$$

Vi använder också notationen

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{eller} \quad \int_\gamma P dx + Q dy.$$

Rent konkret skall följande beräknas:

$$\int_\alpha^\beta \left[P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) \right] dt,$$

där γ parametriserats som $(x(t), y(t))$ på intervallet $[\alpha, \beta]$.

Greens formel

Greens formel

- En generalisering av integralkalkylens huvudsats ("insättningsformeln").

Positiv orientering

Om D är område i planet och randen ∂D är en sluten kurva säger vi att ∂D ges *positiv orientering* om man har området *till vänster* när man går runt ∂D.

Theorem

Antag $\mathbf{F} = (P, Q)$ *där* $P, Q \in C^1(\Omega)$ *och* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *är en öppen mängd .*

Theorem

Antag $\mathbf{F} = (P, Q)$ *där* $P, Q \in C^1(\Omega)$ *och* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *är en öppen mängd .*
Antag $D \subset \Omega$ *kompakt delmängd med rand* ∂D *som består av en eller flera* C^1*-kurvor med positiv orientering.*

Theorem

Antag $\mathbf{F} = (P, Q)$ *där* $P, Q \in C^1(\Omega)$ *och* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *är en öppen mängd .*
Antag $D \subset \Omega$ *kompakt delmängd med rand* ∂D *som består av en eller flera* C^1*-kurvor med positiv orientering.*
Då gäller

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Theorem

Antag $\mathbf{F} = (P, Q)$ *där* $P, Q \in C^1(\Omega)$ *och* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *är en öppen mängd .*

Antag $D \subset \Omega$ *kompakt delmängd med rand* ∂D *som består av en eller flera* C^1*-kurvor med positiv orientering.*

Då gäller

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

- "Integral av derivata över inneromrĂĄde lika med integral av funktion på rand."

Theorem

Antag $\mathbf{F} = (P, Q)$ *där* $P, Q \in C^1(\Omega)$ *och* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *är en öppen mängd .*
Antag $D \subset \Omega$ *kompakt delmängd med rand* ∂D *som består av en eller flera* C^1*-kurvor med positiv orientering.*
Då gäller

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

- "Integral av derivata över innerområde lika med integral av funktion på rand."
- Jämför med
$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Theorem

Antag $\mathbf{F} = (P, Q)$ *där* $P, Q \in C^1(\Omega)$ *och* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *är en öppen mängd .*
Antag $D \subset \Omega$ *kompakt delmängd med rand* ∂D *som består av en eller flera* C^1*-kurvor med positiv orientering.*
Då gäller

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

- "Integral av derivata över innerområde lika med integral av funktion på rand."
- Jämför med
$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$
(Randintegral här ges av evaluering i randpunkter.)

Konsekvens av Greens formel

Om

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

så är

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = 0$$

Konsekvens av Greens formel

Om

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

så är

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = 0$$

ty integranden i dubbelintegralen över D är 0.

Konservativa fält och vägoberoende

Definition

Vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ där P, Q är kontinuerliga säges vara konservativt i Ω om det existerar $U \in C^1(\Omega)$ sådan att

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, U.$$

Example

Fältet $\mathbf{F} = (y, x)$ är konservativt

Konservativa fält och vägoberoende

Definition

Vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ där P, Q är kontinuerliga säges vara konservativt i Ω om det existerar $U \in C^1(\Omega)$ sådan att

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U.$$

Example

Fältet $\mathbf{F} = (y, x)$ är konservativt ty

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U, \quad U(x, y) = xy.$$

Vi säger att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är *oberoende av vägen* om integralens värde endast beror av γ's start och slutpunkt, och inte av kurvans vidare förlopp.

Vi säger att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är *oberoende av vägen* om integralens värde endast beror av γ's start och slutpunkt, och inte av kurvans vidare förlopp.
Ekvivalent: $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva Γ.

Vi säger att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är *oberoende av vägen* om integralens värde endast beror av γ's start och slutpunkt, och inte av kurvans vidare förlopp.
Ekvivalent: $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva Γ.

- Om $\mathbf{F}$ är konservativt fås

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = U(b) - U(a)$$

  där a, b är γ's start och slutpunkter.

Vi säger att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är *oberoende av vägen* om integralens värde endast beror av γ's start och slutpunkt, och inte av kurvans vidare förlopp.
Ekvivalent: $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva Γ.

- Om $\mathbf{F}$ är konservativt fås

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = U(b) - U(a)$$

  där a, b är γ's start och slutpunkter. Speciellt gäller vägoberoende.

Vi säger att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är *oberoende av vägen* om integralens värde endast beror av γ's start och slutpunkt, och inte av kurvans vidare förlopp.
Ekvivalent: $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva Γ.

- Om $\mathbf{F}$ är konservativt fås

  $$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = U(b) - U(a)$$

  där a, b är γ's start och slutpunkter. Speciellt gäller vägoberoende.
- Om $\mathbf{F}$ har potential U av klass C^2 måste $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Vi säger att $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ är *oberoende av vägen* om integralens värde endast beror av γ's start och slutpunkt, och inte av kurvans vidare förlopp.
Ekvivalent: $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva Γ.

- Om $\mathbf{F}$ är konservativt fås

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = U(b) - U(a)$$

  där a, b är γ's start och slutpunkter. Speciellt gäller vägoberoende.
- Om $\mathbf{F}$ har potential U av klass C^2 måste $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
  Om å andra sidan detta är uppfyllt i ett *enkelt sammanhängande område* i planet så är $\mathbf{F}$ konservativt.