Exempel: Visa att $\vec{F} = (2x+y, x)$ är ett konservativt fält i $\mathbb{R}^2$.

Vi söker en funktion $u(x,y)$ av klass C^1 som uppfyller

$$\nabla u = \vec{F}$$

det vill säga

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y & (i) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = x & (ii) \end{cases}$$

Vi integrerar (i) med avseende på x och får

$$u(x,y) = x^2 + xy + \varphi(y)$$

där φ endast beror av y.

Vi beräknar sedan

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + xy + \varphi(y)\right)$$

$$= x + \varphi'(y)$$

och jämför med högerledet i (ii):

vill

$$\varphi'(y) + x = x$$

vilket ger $\varphi'(y) = 0$.

Alltså är $\varphi(y) = C_1'$, en konstant, och

$$u(x, y) = x^2 + xy + C_1'$$

en potential för varje val av $C_1' \in \mathbb{R}$.

Om vi istället hade börjat med (ii) hade vi fått

$$u(x, y) = xy + \psi(x).$$

Derivering hade gett

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xy + \psi(x)\right) = y + \psi'(x)$$

och jämförelse med högerledet i (i) hade resulterat i

$$y + \psi'(x) = y + 2x$$

dvs $\psi'(x) = 2x$ och $\psi(x) = x^2 + C_1$,

så även här blir $u = x^2 + xy + C_1$.

Ex: Visa att

$$\vec{B} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

ej är konservativt i $\mathbb{R}^2$.

Det räcker att visa att det finns en enkel sluten kurva Γ sådan att

$$\int_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{r} \neq 0 .$$

Låt oss ta $\Gamma = \{ (\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi] \}$, enhetscirkeln i $\mathbb{R}^2$ med centrum i origo.

Vi har

$$\int_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t}, \frac{\cos t}{\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}} \right) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi .$$

Alltså är $\vec{B}$ ej konservativt i hela $\mathbb{R}^2$.