Matematik II Analys del B, Femte mötet vårterminen 2023

Alan Sola

Denna vecka:

- Ytintegraler
- Gauss sats
- Stokes sats

Förra gången: Ytintegraler

Förra gången: Ytintegraler

Upplägg: $\mathcal{S}$ yta på parameterform som beskrivs av

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)).$$

Förra gången: Ytintegraler

Upplägg: $\mathcal{S}$ yta på parameterform som beskrivs av

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)).$$

Enhetsnormal till ytan: $\mathbf{N} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ där

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t,$$

Förra gången: Ytintegraler

Upplägg: $\mathcal{S}$ yta på parameterform som beskrivs av

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)).$$

Enhetsnormal till ytan: $\mathbf{N} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ där

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t,$$

välj vanligtvit utåtriktad.
Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Förra gången: Ytintegraler

Upplägg: $\mathcal{S}$ yta på parameterform som beskrivs av

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)).$$

Enhetsnormal till ytan: $\mathbf{N} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ där

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t,$$

välj vanligtvit utåtriktad.

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Ytintegralen av $\mathbf{u}$:

$$\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{D} \mathbf{u}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot (\mathbf{r}'_s(s,t) \times \mathbf{r}'_t(s,t)) ds dt.$$

Exempel: Beräkna flödet av

$$\mathbf{u} = (x, 0, z)$$

ut genom ytan $\mathcal{S}$ som består av $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ där $1 \leq z \leq 2$, plus två lock.

Operationer på vektorfält

Operationer på vektorfält

Definition: Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett vektorfält med partiellt deriverbara komponenter. Vi definierar *divergensen* av $\mathbf{u}$ som funktionen

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

Operationer på vektorfält

Definition: Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett vektorfält med partiellt deriverbara komponenter. Vi definierar *divergensen* av $\mathbf{u}$ som funktionen

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

- Formellt: $\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}).$

Operationer på vektorfält

Definition: Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett vektorfält med partiellt deriverbara komponenter. Vi definierar *divergensen* av $\mathbf{u}$ som funktionen

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

- Formellt: $\operatorname{div}\mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \qquad \nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}).$

Definition: Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara vektorfält med partiellt deriverbara komponenter. Vi definierar *rotationen* av $\mathbf{u}$ som vektorfältet

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right).$$

Operationer på vektorfält

Definition: Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett vektorfält med partiellt deriverbara komponenter. Vi definierar *divergensen* av $\mathbf{u}$ som funktionen

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

- Formellt: $\operatorname{div}\mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$, $\quad \nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

Definition: Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara vektorfält med partiellt deriverbara komponenter. Vi definierar *rotationen* av $\mathbf{u}$ som vektorfältet

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right).$$

- Formellt: $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}$.

Operationer på vektorfält

Definition: Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett vektorfält med partiellt deriverbara komponenter. Vi definierar *divergensen* av $\mathbf{u}$ som funktionen

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

- Formellt: $\operatorname{div}\mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$, $\quad \nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

Definition: Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara vektorfält med partiellt deriverbara komponenter. Vi definierar *rotationen* av $\mathbf{u}$ som vektorfältet

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right).$$

- Formellt: $\operatorname{rot}\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}$. (Beräkna med formell determinant.)

Exempel: Vektorfältet $\mathbf{u} = (x, 0, z)$

Exempel: Vektorfältet $\mathbf{u} = (x, 0, z)$ har

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = \nabla \cdot (x, 0, z) = 1 + 0 + 1 = 2$$

Exempel: Vektorfältet $\mathbf{u} = (x, 0, z)$ har

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = \nabla \cdot (x, 0, z) = 1 + 0 + 1 = 2$$

samt

$$\mathrm{rot}\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 0 & z \end{vmatrix}$$

Exempel: Vektorfältet $\mathbf{u} = (x, 0, z)$ har

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = \nabla \cdot (x, 0, z) = 1 + 0 + 1 = 2$$

samt

$$\mathrm{rot}\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 0 & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0).$$

Exempel: Vektorfältet $\mathbf{u} = (x, 0, z)$ har

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = \nabla \cdot (x, 0, z) = 1 + 0 + 1 = 2$$

samt

$$\mathrm{rot}\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 0 & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0).$$

- Vektorfält vars rotation är lika med noll kallas ibland för *virvelfria*.

Gauss sats eller divergenssatsen

Gauss sats eller divergenssatsen

Theorem

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *vara ett vektorfält av klass* C^1 *i en öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Gauss sats eller divergenssatsen

Theorem

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *vara ett vektorfält av klass* C^1 *i en öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
Antag $K \subset \Omega$ *kompakt område med rand* ∂K *bestående av en eller flera* C^1*-ytor, orienterad med utåtriktad normal.*

Gauss sats eller divergenssatsen

Theorem

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *vara ett vektorfält av klass* C^1 *i en öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
Antag $K \subset \Omega$ *kompakt område med rand* ∂K *bestående av en eller flera* C^1*-ytor, orienterad med utåtriktad normal.*
Då gäller

$$\iint_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{u} dxdydz.$$

Exempel: Beräkna flödet av

$$\mathbf{u} = (x, 0, z)$$

ut genom ytan $\mathcal{S}$ som består av $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ där $1 \leq z \leq 2$, plus två lock.

Exempel: Beräkna flödet av

$$\mathbf{u} = (x, 0, z)$$

ut genom ytan $\mathcal{S}$ som består av $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ där $1 \leq z \leq 2$, plus två lock.
Nu med Gauss sats!

Stokes sats

Stokes sats

Theorem

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *vara ett vektorfält av klass* C^1 *i en öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Stokes sats

Theorem

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *vara ett vektorfält av klass* C^1 *i en öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$*.*
Antag $\mathcal{S} \subset \Omega$ *orienterat ytstycke med orienterad rand* $\partial\mathcal{S}$*.*

Stokes sats

Theorem

Låt $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *vara ett vektorfält av klass* C^1 *i en öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
Antag $\mathcal{S} \subset \Omega$ *orienterat ytstycke med orienterad rand* $\partial\mathcal{S}$.
Då gäller

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS.$$

Orienterad yta med orienterad rand:

Orienterad yta med orienterad rand:
vi har $\mathbf{N} \times \mathbf{T}$ som pekar in mot ytan, där $\mathbf{N}$ är normalvektor och $\mathbf{T}$ är tangentvektor på $\partial \mathcal{S}$.

Orienterad yta med orienterad rand:
vi har $\mathbf{N} \times \mathbf{T}$ som pekar in mot ytan, där $\mathbf{N}$ är normalvektor och $\mathbf{T}$ är tangentvektor på $\partial\mathcal{S}$.

- När man rör sig på randkurvan har man ytan till vänster.