Matematik II Analys del B,
Fjärde mötet vårterminen 2023

Alan Sola

Denna vecka:

- Vektoranalys i högre dimensioner.
- Kurvintegraler i rummet.
- Ytor, tangenter och normaler.

Förra gången: Greens formel i planet

Förra gången: Greens formel i planet

Theorem

Antag $\mathbf{F} = (P, Q)$ *där* $P, Q \in C^1(\Omega)$ *och* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *är en öppen mängd .*

Förra gången: Greens formel i planet

Theorem

Antag $\mathbf{F} = (P, Q)$ *där* $P, Q \in C^1(\Omega)$ *och* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *är en öppen mängd .*

Antag $D \subset \Omega$ *kompakt delmängd med rand* ∂D *som består av en eller flera* C^1*-kurvor med positiv orientering.*

Förra gången: Greens formel i planet

Theorem

Antag $\mathbf{F} = (P, Q)$ *där* $P, Q \in C^1(\Omega)$ *och* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *är en öppen mängd .*

Antag $D \subset \Omega$ *kompakt delmängd med rand* ∂D *som består av en eller flera* C^1*-kurvor med positiv orientering.*

Då gäller

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Förra gången: Greens formel i planet

Theorem

Antag $\mathbf{F} = (P, Q)$ *där* $P, Q \in C^1(\Omega)$ *och* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *är en öppen mängd .*

Antag $D \subset \Omega$ *kompakt delmängd med rand* ∂D *som består av en eller flera* C^1*-kurvor med positiv orientering.*

Då gäller

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

- Positiv orientering betyder att området D ligger "till vänster" när man går runt kurvan.

Förra gången: **Konservativa fält och vägoberoende**

Definition

Vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ där P, Q är kontinuerliga säges vara konservativt i Ω om det existerar $U \in C^1(\Omega)$ sådan att

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, U.$$

Förra gången: **Konservativa fält och vägoberoende**

Definition

Vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ där P, Q är kontinuerliga säges vara konservativt i Ω om det existerar $U \in C^1(\Omega)$ sådan att

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, U.$$

Vi säger att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är *oberoende av vägen* om integralens värde endast beror av γ's start och slutpunkt, och inte av kurvans vidare förlopp.

Förra gången: **Konservativa fält och vägoberoende**

Definition

Vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ där P, Q är kontinuerliga säges vara konservativt i Ω om det existerar $U \in C^1(\Omega)$ sådan att

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, U.$$

Vi säger att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är *oberoende av vägen* om integralens värde endast beror av γ's start och slutpunkt, och inte av kurvans vidare förlopp.

- Viktiga samband mellan *konservativt fält* och *vägoberoende*.

Vektorfält i rummet

Vektorfält i rummet
Ett vektorfält är en funktion

$$\mathbb{F}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

på formen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1(\mathbf{r}), \ldots, F_n(\mathbf{r}))$$

där $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ och F_j är kontinuerliga funktioner (ofta C^1).

Vektorfält i rummet

Ett vektorfält är en funktion

$$\mathbb{F}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

på formen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1(\mathbf{r}), \ldots, F_n(\mathbf{r}))$$

där $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ och F_j är kontinuerliga funktioner (ofta C^1).

- Ofta betraktar vi fallet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Vektorfält i rummet
Ett vektorfält är en funktion

$$\mathbb{F}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

på formen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1(\mathbf{r}), \ldots, F_n(\mathbf{r}))$$

där $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ och F_j är kontinuerliga funktioner (ofta C^1).

- Ofta betraktar vi fallet $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ —naturligt i tillämpningar i fysik.

Vektorfält i rummet
Ett vektorfält är en funktion

$$\mathbb{F} \colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

på formen

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_1(\mathbf{r}), \dots, F_n(\mathbf{r}))$$

där $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n)$ och F_j är kontinuerliga funktioner (ofta C^1).

- Ofta betraktar vi fallet $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ —naturligt i tillämpningar i fysik.

En *kurva på parameterform* ges av

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in [\alpha, \beta]\}$$

där x_j är kontinuerliga funktioner (ofta C^1).

En *kurva på parameterform* ges av

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in [\alpha, \beta]\}$$

där x_j är kontinuerliga funktioner (ofta C^1).

- Vi sätter $\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$.

En *kurva på parameterform* ges av

$$\gamma = \{\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad t \in [\alpha, \beta]\}$$

där x_j är kontinuerliga funktioner (ofta C^1).

- Vi sätter $\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$. Precis som tidigare är detta
$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$
när detta existerar.

Exempel

Karaktärisera kurvan i rummet som beskrivs av

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), t \geq 0.$$

Exempel

Karaktärisera kurvan i rummet som beskrivs av

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), t \geq 0.$$

Observera att $x_1^2(t) + x_2^2(t) = 1$ för alla $t \geq 0$.

Exempel
Karaktärisera kurvan i rummet som beskrivs av

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), t \geq 0.$$

Observera att $x_1^2(t) + x_2^2(t) = 1$ för alla $t \geq 0$.
Kurvan är en *skruvlinje* (helix).

Kurvintegraler i rummet

Om $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ är ett vektorfält och $\gamma = \{\mathbf{r}(t) \colon t \in [\alpha, \beta]\}$ definierar vi *kurvintegralen av* $\mathbf{F}$ *längs kurvan* γ som

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Kurvintegraler i rummet

Om $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ är ett vektorfält och $\gamma = \{\mathbf{r}(t) \colon t \in [\alpha, \beta]\}$ definierar vi *kurvintegralen av* $\mathbf{F}$ *längs kurvan* γ som

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

- I tre variabler skriver vi ibland $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma P dx + Q dy + R dz$.

Kurvintegraler i rummet

Om $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ är ett vektorfält och $\gamma = \{\mathbf{r}(t) \colon t \in [\alpha, \beta]\}$ definierar vi *kurvintegralen av* $\mathbf{F}$ *längs kurvan* γ som

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

- I tre variabler skriver vi ibland $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma P dx + Q dy + R dz$.
- Uppenbar generalisering till $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$.

Kurvintegraler i rummet

Om $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ är ett vektorfält och $\gamma = \{\mathbf{r}(t) \colon t \in [\alpha, \beta]\}$ definierar vi *kurvintegralen av* $\mathbf{F}$ *längs kurvan* γ som

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

- I tre variabler skriver vi ibland $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma P dx + Q dy + R dz$.
- Uppenbar generalisering till $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$.
- Beräkning med hjälp av integrationstekniker i en variabel.

Om $\mathbf{F}$ är *konservativt*, det vill säga om

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, U$$

för någon funktion $U\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Om $\mathbf{F}$ är *konservativt*, det vill säga om

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$$

för någon funktion $U\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ så gäller

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}(\beta)) - U(\mathbf{r}(\alpha)).$$

Om **F** är *konservativt*, det vill säga om

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, U$$

för någon funktion $U\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ så gäller

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}(\beta)) - U(\mathbf{r}(\alpha)).$$

- Observera att begreppet enkelt sammanhängande är mer subtilt i högre dimension

Om $\mathbf{F}$ är *konservativt*, det vill säga om

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, U$$

för någon funktion $U\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ så gäller

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}(\beta)) - U(\mathbf{r}(\alpha)).$$

- Observera att begreppet enkelt sammanhängande är mer subtilt i högre dimension, jmfr. en ihålig sfär.

Ytor i rummet

Se handskrivna anteckningar med ritade bilder.

Ytintegraler

Antag $\mathcal{S}$ yta på parameterform som beskrivs av

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)).$$

Ytintegraler

Antag $\mathcal{S}$ yta på parameterform som beskrivs av

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)).$$

Om $\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}'_t \neq \mathbf{0}$ ger

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t$$

normalvektor till $\mathcal{S}$ i varje punkt.

Ytintegraler

Antag $\mathcal{S}$ yta på parameterform som beskrivs av

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)).$$

Om $\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}'_t \neq \mathbf{0}$ ger

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t$$

normalvektor till $\mathcal{S}$ i varje punkt.

- Ofta betraktar vi $\mathbf{N} = \mathbf{n}/\|\mathbf{n}\|$, en enhetsnormal.

Ytintegraler

Antag $\mathcal{S}$ yta på parameterform som beskrivs av

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)).$$

Om $\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}'_t \neq \mathbf{0}$ ger

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t$$

normalvektor till $\mathcal{S}$ i varje punkt.

- Ofta betraktar vi $\mathbf{N} = \mathbf{n}/\|\mathbf{n}\|$, en enhetsnormal.
- Viktigt specialfall: om ytan ges av en graf,

$$(s, t, f(s,t))$$

Ytintegraler

Antag $\mathcal{S}$ yta på parameterform som beskrivs av

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)).$$

Om $\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}'_t \neq \mathbf{0}$ ger

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t$$

normalvektor till $\mathcal{S}$ i varje punkt.

- Ofta betraktar vi $\mathbf{N} = \mathbf{n}/\|\mathbf{n}\|$, en enhetsnormal.
- Viktigt specialfall: om ytan ges av en graf,

  $$(s, t, f(s,t))$$

  fås

  $$\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = (-f'_s, -f'_y, 1).$$

Ytintegraler

Antag $\mathcal{S}$ yta på parameterform som beskrivs av

$$\mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)).$$

Om $\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}'_t \neq \mathbf{0}$ ger

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t$$

normalvektor till $\mathcal{S}$ i varje punkt.

- Ofta betraktar vi $\mathbf{N} = \mathbf{n}/\|\mathbf{n}\|$, en enhetsnormal.
- Viktigt specialfall: om ytan ges av en graf,

$$(s, t, f(s,t))$$

  fås

$$\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = (-f'_s, -f'_y, 1).$$

Arean av en buktig yta:

$$A(\mathcal{S}) = \iint_D |\mathbf{r}'_\mathbf{s} \times \mathbf{r}'_t| dsdt$$

Låt nu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett vektorfält med u_j åtminstone kontinuerliga.

Låt nu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett vektorfält med u_j åtminstone kontinuerliga.
Vi betraktar *flödesintegralen* eller *ytintegralen* av $\mathbf{u}$:

$$\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_D \mathbf{u}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot (\mathbf{r}'_s(s,t) \times \mathbf{r}'_t(s,t)) dsdt.$$

Låt nu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett vektorfält med u_j åtminstone kontinuerliga.
Vi betraktar *flödesintegralen* eller *ytintegralen* av $\mathbf{u}$:

$$\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_D \mathbf{u}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot (\mathbf{r}'_s(s,t) \times \mathbf{r}'_t(s,t)) dsdt.$$

- Den parametriserade integralen till höger beräknas en en vanlig dubbelintegral

Låt nu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett vektorfält med u_j åtminstone kontinuerliga.
Vi betraktar *flödesintegralen* eller *ytintegralen* av $\mathbf{u}$:

$$\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_D \mathbf{u}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot (\mathbf{r}'_s(s,t) \times \mathbf{r}'_t(s,t)) ds dt.$$

- Den parametriserade integralen till höger beräknas en en vanlig dubbelintegral—det kan dock uppstå svåra räkningar.

Låt nu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett vektorfält med u_j åtminstone kontinuerliga.
Vi betraktar *flödesintegralen* eller *ytintegralen* av $\mathbf{u}$:

$$\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_D \mathbf{u}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot (\mathbf{r}'_s(s,t) \times \mathbf{r}'_t(s,t)) dsdt.$$

- Den parametriserade integralen till höger beräknas en en vanlig dubbelintegral—det kan dock uppstå svåra räkningar.
- Observera normaliseringen:

Låt nu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett vektorfält med u_j åtminstone kontinuerliga.
Vi betraktar *flödesintegralen* eller *ytintegralen* av $\mathbf{u}$:

$$\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{D} \mathbf{u}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot (\mathbf{r}'_s(s,t) \times \mathbf{r}'_t(s,t)) ds dt.$$

- Den parametriserade integralen till höger beräknas en en vanlig dubbelintegral—det kan dock uppstå svåra räkningar.
- Observera normaliseringen:vi har

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t}{\|\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t\|}$$

Låt nu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vara ett vektorfält med u_j åtminstone kontinuerliga.
Vi betraktar *flödesintegralen* eller *ytintegralen* av $\mathbf{u}$:

$$\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_D \mathbf{u}(\mathbf{r}(s,t)) \cdot (\mathbf{r}'_s(s,t) \times \mathbf{r}'_t(s,t)) dsdt.$$

- Den parametriserade integralen till höger beräknas en en vanlig dubbelintegral—det kan dock uppstå svåra räkningar.
- Observera normaliseringen:vi har

  $$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t}{\|\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t\|}$$

  medan ytelementet är

  $$dS = \|\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t\| dsdt.$$