STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN
17 april 2023

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

17 april 2023 kl. 14–19

Examinator: Maria Deijfen, 070-3369790.
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling och miniräknare som delas ut med tentan.
Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast fredag 28 april.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

En matematikföreläsare har bra, halvbra och dåliga dagar. En bra dag är antalet skrivfel på tavlan under en föreläsning Poissonfördelat med parameter 2. En halvbra dag ökar parametern i fördelningen till 5 och en dålig dag är parametern 12. Sannolikheten att en dag är bra, halvbra respektive dålig ges av 0.3, 0.5 respektive 0.2.

a) Bestäm det förväntade antalet skrivfel som föreläsaren gör sig skyldig till under en föreläsning.

b) Bestäm sannolikheten att föreläsaren begår precis 6 skrivfel under en föreläsning.

Uppgift 2

Följden av bokstäver i en text kan betraktas som en Markovkedja med tre tillstånd E_0, E_1 och E_2 där E_0 är ordmellanrum (som alltså betraktas som en egen typ av bokstav), E_1 är vokal och E_2 är konsonant. För en svensk text är övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0.16 & 0.01 & 0.83 \\ 0.24 & 0.47 & 0.29 \end{pmatrix}.$$

Bestäm proportionerna mellan antalet vokaler och konsonanter i en svensk text (dvs bestäm hur många vokaler det i genomsnitt går på varje konsonant).

Uppgift 3

Låt $N(t)$ vara en Poissonprocess med intensitet $\lambda = 3$.

a) Vilken fördelning har $N(3)$? (2 p)

b) Beräkna $P(N(2) - N(1) = 2)$. (2 p)

c) Beräkna $P(N(2) = 3 \,|N(1) = 1)$ (4 p)

d) Låt T vara tiden mellan den första och den andra händelsen i $N(t)$. Vilken fördelning har T? (2 p)

Svårare del

Uppgift 4

Låt X_n beteckna storleken av den n:te generationen i en förgreningsprocess där sannolikheten att en viss individ får j avkommor är p_j för $j = 0, 1, 2$, med $p_0 = 1/9$, $p_1 = 4/9$ och $p_2 = 4/9$.

a) Beräkna sannolikheten att populationen slutligen dör ut om $X_0 = 3$.

b) Beräkna sannolikheten att $X_2 = 0$ om $X_0 = 1$.

Uppgift 5

Rysk roulette spelas mellan två deltagare som växelvis turas om att rikta en revolver mot sin tinning, snurra magasinet och trycka på avtryckaren. Det är därvid 1/6 risk att ett skott verkligen går av. Vi antar att skytten avlider om så sker. Om inget skott går av överlämnar skytten pistolen till den andre deltagaren, som gör om samma försök. Spelet slutar med att en av deltagarna avlider.

Antag att ett parti rysk roulette spelas mellan herrarna Kolmogorov och Markov. Vid varje tillfälle under spelet råder ett av fyra möjliga tillstånd:

1. Båda spelarna lever, Kolmogorov står i tur att trycka av. 2. Båda spelarna lever, Markov står i tur att trycka av. 3. Kolmogorov har avlidit. 4. Markov har avlidit.

a) Sätt upp övergångsmatrisen för kedjan.

b) Dela in kedjan i klasser och ange vilka klasser som är rekurrenta respektive transienta.

c) Vad är sannolikheten att Kolmogorov vinner partiet, givet att han är den som ska trycka av först?

Uppgift 6

I två kärl som står i förbindelse med varandra finns totalt m stycken gasmolekyler. Varje molekyl stannar i ett kärl för en tid som är Exp(1)-fördelad, därefter flyttar den till det andra kärlet. Molekylernas rörelser är oberoende av varandra. Låt $X(t)$ vara antalet molekyler i det ena kärlet vid tidpunkten $t \geq 0$.

a) Processen $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ är en födelse-dödsprocess. Ange modellens parametrar.

b) Bestäm den asymptotiska fördelningen för processen $\{X(t)\}_{t\geq 0}$.

Ledning: Formeln $\sum_{n=1}^{m} \binom{m}{n} = 2^m$ kan eventuellt vara till nytta.

Lycka till!