STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
MM4001 Matematik för naturvetenskaper II
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
2023-05-04

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

---

1. **(4+1 p.)** (a) Finn alla lösningar till den diofantiska ekvationen
$$24x + 114y = 42.$$
(b) Har den diofantiska ekvationen $27x + 3y = 478593211$ några lösningar?

2. **(2+3 p.)** (a) Bestäm Maclaurinpolynomet p_2 av grad 2 till funktionen $f(x) = \sqrt{1+4x}$.
(b) Visa att felet vid Maclaurinapproximationen i (a) för x mellan 0 och $0,1$ är högst $4 \cdot 10^{-3}$, dvs.
$$|f(x) - p_2(x)| \leq 4 \cdot 10^{-3} \quad \text{för } 0 \leq x \leq 0,1.$$

3. **(4 p.)** Talföljden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ges rekursivt av $a_1 := 2$,
$$a_n := 2\frac{n}{n-1}a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$
Bevisa med induktion att $a_n = n2^n$ gäller för alla positiva heltal n.

4. **(3+3 p.)** (a) Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_{D_1} x^2 y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
där $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3 - 2x\}$.
(b) Beräkna $\iint_{D_2} xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, där D_2 är den del av cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$ som ligger mellan den positiva x-axeln och linjen $y = x$ inom den första kvadranten.

5. **(2+3 p.)** (a) I standardbasen, beräkna matrisframställningen för den ortogonala projektionen i planet på linjen $x - 2y = 0$.
(b) Betrakta den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som i standardbasen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ges av matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Vilken matrisframställning $A_{\mathbb{B}}$ har F i basen $\mathbb{B} = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$?

6. **(2+3 p.)** Låt $f(x, y) = xe^{y^2}$ och $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
(a) Beräkna tangentplanet till grafen $z = f(x, y)$ i punkten $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
(b) Bestäm alla punkter (x_0, y_0) sådana att tangentplanet i (a) sammanfaller med planet $-2ex - 16ey + 2z + 16e = 0$.

Tentamensåterlämning annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!