Sats: Antag att $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ är en följd av kontinuerliga funktioner på ett intervall I som konvergerar likformigt mot f.

Då är f kontinuerlig på I.

Bevis: Fixera $x_0 \in I$ och låt $\varepsilon > 0$ vara givet.

Vi ska visa att det existerar $\delta > 0$ sådant att

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Vi har för varje k att

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f(x_0)| \\
= &|f(x) - f_k(x) \\
&\quad + f_k(x) - f_k(x_0) \\
&\quad\quad + f_k(x_0) - f(x_0)|
\end{aligned}$$

(triangelolikheten)

$$\begin{aligned}
\leq \; &|f(x) - f_k(x)| \\
&+ |f_k(x) - f_k(x_0)| \\
&+ |f_k(x_0) - f(x_0)|
\end{aligned}$$

Eftersom $\sup_{x \in I} |f(x) - f_k(x)| \longrightarrow 0$

kan vi välja ett k så att

$$|f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

och

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alltså fås

$$|f(x) - f(x_0)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_k(x) - f_k(x_0)| + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$= \frac{2\varepsilon}{3} + |f_k(x) - f_k(x_0)|$$

Då f_k är kontinuerlig finns $\delta > 0$ s.a.

$$|f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

för $|x - x_0| < \delta$.

Alltså

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \underline{\underline{\varepsilon}}$$

förutsatt att $|x - x_0| < \delta$.