Matematik II Analys del B, Sjunde mötet vårterminen 2023

Alan Sola

Avslutande material:

- Analytiska funktioner, fortsättning
- Likformig konvergens
- Funktionsserier

Förra gången: Funktioner av en komplex variabel

Förra gången: Funktioner av en komplex variabel

En funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kan skrivas som

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Förra gången: Funktioner av en komplex variabel

En funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kan skrivas som

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

där $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ och $v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ kallas *real*-och *imaginärdelar* till f.

Definition (Komplexa kurvintegraler)

För en orienterad deriverbar kurva

$$\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t)\colon \alpha \leq t \leq \beta\}$$

sätter vi

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(t)dt.$$

Förra gången: Funktioner av en komplex variabel

En funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kan skrivas som

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

där $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ och $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ kallas *real*-och *imaginärdelar* till f.

Definition (Komplexa kurvintegraler)

För en orienterad deriverbar kurva

$$\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}$$

sätter vi

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(t)dt.$$

- Utskrivet för real-och imaginärdelar betyder detta

$$\int_\alpha^\beta (udx - vdy) + i \int_\alpha^\beta (vdx + udy).$$

Exempel:

Vi kan parametrisera och beräkna

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i,$$

där $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ och

$$\gamma = \{a + re^{it} \colon t \in [0, 2\pi]\}.$$

Definition (Begreppet analytisk funktion via Cauchy-Riemanns ekvationer)

Vi säger at $f = u + iv$ är analytisk i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$ om $u(x,y), v(x,y) \in C^1(\Omega)$ och uppfyller

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

och

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Definition (Begreppet analytisk funktion via Cauchy-Riemanns ekvationer)

Vi säger at $f = u + iv$ är analytisk i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$ om $u(x,y), v(x,y) \in C^1(\Omega)$ och uppfyller

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

och

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Theorem (Analytiska funktioner som funktioner med komplex derivata)

Låt $f = u + iv$ *ha* $u, v \in C^1(\Omega)$.

Theorem (Analytiska funktioner som funktioner med komplex derivata)

Låt $f = u + iv$ ha $u, v \in C^1(\Omega)$. Då är f analytisk om och endast om

$$f'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existerar i varje punkt i Ω.

Theorem (Analytiska funktioner som funktioner med komplex derivata)

Låt $f = u + iv$ *ha* $u, v \in C^1(\Omega)$*. Då är* f *analytisk om och endast om*

$$f'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existerar i varje punkt i Ω*.*

- Polynom är analytiska funktioner, likaså $e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$.

Theorem (Analytiska funktioner som funktioner med komplex derivata)

Låt $f = u + iv$ *ha* $u, v \in C^1(\Omega)$*. Då är* f *analytisk om och endast om*

$$f'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existerar i varje punkt i Ω*.*

- Polynom är analytiska funktioner, likaså $e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$.
- OBS: $f(z) = \bar{z} = x - iy$ EJ analytisk funktion.

Theorem (Cauchys sats)

Antag f *analytisk i enkelt sammanhängande öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *och* γ *enkel sluten kurva i* Ω.

Theorem (Cauchys sats)

Antag f *analytisk i enkelt sammanhängande öppen mängd* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *och* γ *enkel sluten kurva i* Ω.
Då gäller

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Bevisskiss:

Om $f = u + iv$ är en komplexvärd kontinuerlig funktion och $\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t)\colon t \in [\alpha, \beta]\}$ är parameterkurva har vi

$$\int_\gamma f dz = \int_\alpha^\beta (udx - vdy) + i \int_\alpha^\beta (vdx + udy).$$

Bevisskiss:

Om $f = u + iv$ är en komplexvärd kontinuerlig funktion och $\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \colon t \in [\alpha, \beta]\}$ är parameterkurva har vi

$$\int_\gamma f dz = \int_\alpha^\beta (u dx - v dy) + i \int_\alpha^\beta (v dx + u dy).$$

Antag att γ är enkel och sluten, dvs. $z(t) \neq z(s)$ för $\alpha < s < t < \beta$ samt $z(\alpha) = z(\beta)$, och $\gamma = \partial K$ där K är det inre av γ.

Bevisskiss:

Om $f = u + iv$ är en komplexvärd kontinuerlig funktion och $\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \colon t \in [\alpha, \beta]\}$ är parameterkurva har vi

$$\int_\gamma f dz = \int_\alpha^\beta (udx - vdy) + i \int_\alpha^\beta (vdx + udy).$$

Antag att γ är enkel och sluten, dvs. $z(t) \neq z(s)$ för $\alpha < s < t < \beta$ samt $z(\alpha) = z(\beta)$, och $\gamma = \partial K$ där K är det inre av γ. Tillämpa Greens formel på real och imaginärdel.

Bevisskiss:

Om $f = u + iv$ är en komplexvärd kontinuerlig funktion och $\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \colon t \in [\alpha, \beta]\}$ är parameterkurva har vi

$$\int_\gamma f dz = \int_\alpha^\beta (udx - vdy) + i \int_\alpha^\beta (vdx + udy).$$

Antag att γ är enkel och sluten, dvs. $z(t) \neq z(s)$ för $\alpha < s < t < \beta$ samt $z(\alpha) = z(\beta)$, och $\gamma = \partial K$ där K är det inre av γ. Tillämpa Greens formel på real och imaginärdel. Till exempel fås

$$\int_\gamma udx - vdy = \iint_K \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

där integranden är noll enligt Cauchy-Riemanns ekvationer.

Exempel:
Om $\gamma = \{10 + e^{it} \colon\, t \in [0, 2\pi]\}$ fås

$$\int_\gamma \frac{e^z \cos z - (z+2)^{32} + ze^{-z}}{z^2 - 1} dz$$

Exempel:

Om $\gamma = \{10 + e^{it} \colon t \in [0, 2\pi]\}$ fås

$$\int_\gamma \frac{e^z \cos z - (z+2)^{32} + ze^{-z}}{z^2 - 1} dz = 0.$$

Exempel:

Om $\gamma = \{10 + e^{it} \colon t \in [0, 2\pi]\}$ fås

$$\int_\gamma \frac{e^z \cos z - (z+2)^{32} + ze^{-z}}{z^2 - 1} dz = 0.$$

Integranden är analytisk i hela planet utom i $z = 1$ och $z = -1$.

Exempel:

Om $\gamma = \{10 + e^{it} \colon t \in [0, 2\pi]\}$ fås

$$\int_\gamma \frac{e^z \cos z - (z+2)^{32} + ze^{-z}}{z^2 - 1} dz = 0.$$

Integranden är analytisk i hela planet utom i $z = 1$ och $z = -1$.

- OBS: Detta argument är inte giltigt om $\gamma = \{1 + e^{it} \colon 0 \leq t \leq 2\pi\}$!.

Theorem (Cauchys integralformel)

Antag f *analytisk i öppen enkelt sammangängade* $\Omega \subset \mathbb{C}$. *Antag* $\gamma \subset \Omega$ *positivt orienterad enkel sluten kurva.*

Theorem (Cauchys integralformel)

Antag f analytisk i öppen enkelt sammangängade $\Omega \subset \mathbb{C}$. Antag $\gamma \subset \Omega$ positivt orienterad enkel sluten kurva. Dågäller

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

för varje $z \in \operatorname{int}(\gamma)$.

Exempel:

Med hjälp av komplex analys kan vi visa:

Exempel:

Med hjälp av komplex analys kan vi visa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

är konvergent och har värdet π.

Med hjälp av komplex analys kan vi visa:

Med hjälp av komplex analys kan vi visa:

Theorem (Algebrans fundamentalsats)

Låt $p = p(z)$ *vara ett komplext polynom av grad* $n \geq 1$. *Då har* p *ett komplext nollställe.*

- Det följer att p har precis n nollställen om vi räknar rötter med multiplicitet.

Summan av en geometrisk serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

Summan av en geometrisk serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

- Kan utvidgas till komplexa argument!

Summan av en geometrisk serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

- Kan utvidgas till komplexa argument!

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Funktioner givna som potensserier:

Funktioner givna som potensserier:
Cauchys integralformel ger för analytisk f att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Funktioner givna som potensserier:
Cauchys integralformel ger för analytisk f att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

där γ är en cirkel med mittpunkt z_0. Skriv

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} =$$

Funktioner givna som potensserier:
Cauchys integralformel ger för analytisk f att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

där γ är en cirkel med mittpunkt z_0. Skriv

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}.$$

Funktioner givna som potensserier:
Cauchys integralformel ger för analytisk f att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

där γ är en cirkel med mittpunkt z_0. Skriv

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Om z innanför γ har vi $|z - z_0|/|\zeta - z_0| < 1$.

Funktioner givna som potensserier:
Cauchys integralformel ger för analytisk f att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

där γ är en cirkel med mittpunkt z_0. Skriv

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Om z innanför γ har vi $|z - z_0|/|\zeta - z_0| < 1$. Jämför med summan av en geometrisk serie:

Funktioner givna som potensserier:
Cauchys integralformel ger för analytisk f att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

där γ är en cirkel med mittpunkt z_0. Skriv

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Om z innanför γ har vi $|z - z_0|/|\zeta - z_0| < 1$. Jämför med summan av en geometrisk serie:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k}.$$

Analytiska funktioner och konvergenta potensserier

Om vi byter plats på integration och summation får vi

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k,$$

Analytiska funktioner och konvergenta potensserier

Om vi byter plats på integration och summation får vi

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k,$$

där

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

Analytiska funktioner och konvergenta potensserier
Om vi byter plats på integration och summation får vi

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k,$$

där

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

Om vi deriverar under integraltecknet kan vi vidare skriva

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Får man byta ordning på integration och derivering?
Får man byta plats på integration och derivering?

Får man byta ordning på integration och derivering?
Får man byta plats på integration och derivering?

- I allmänhet inte!

Exempel:

Låt för $k = 1, 2, \ldots$

$$g_k(x) = \frac{1}{1 + (x-k)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exempel:

Låt för $k = 1, 2, \ldots$

$$g_k(x) = \frac{1}{1 + (x - k)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vi har för fixt k

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_k(x) dx$$

Exempel:

Låt för $k = 1, 2, \ldots$

$$g_k(x) = \frac{1}{1 + (x-k)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vi har för fixt k

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_k(x)dx = [y = x - k]$$

Exempel:
Låt för $k = 1, 2, \ldots$

$$g_k(x) = \frac{1}{1 + (x-k)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vi har för fixt k

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_k(x) dx = [y = x - k] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \pi.$$

Exempel:

Låt för $k = 1, 2, \ldots$

$$g_k(x) = \frac{1}{1 + (x-k)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vi har för fixt k

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_k(x) dx = [y = x - k] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \pi.$$

För fixt x gäller däremot

$$\lim_{k \to \infty} g_k(x) = 0.$$

Exempel:
Låt för $k = 1, 2, \ldots$

$$g_k(x) = \frac{1}{1 + (x-k)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vi har för fixt k

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_k(x)dx = [y = x - k] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \pi.$$

För fixt x gäller däremot

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = 0.$$

Så

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{k\to\infty} g_k(x)dx = 0 \neq \pi = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_k(x)dx.$$

Ofta efterfrågar man *likformig konvergens*!

Ofta efterfrågar man *likformig konvergens*!

Definition

Låt $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av funktioner på $I \subset \mathbb{R}$.

Ofta efterfrågar man *likformig konvergens*!

Definition

Låt $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ vara en följd av funktioner på $I \subset \mathbb{R}$.
Vi säger att f_k konvergerar punktvis mot f på I om det för varje $x \in I$ gäller att

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) - f(x) = 0.$$

Vi säger att $\{f_k\}$ konvergerar likformigt mot f på I om

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in I} |f_k(x) - f(x)| = 0.$$

Exempel: Betrakta följden $f_k(x) = x^k$ på intervallet $[0, 1]$.

Exempel: Betrakta följden $f_k(x) = x^k$ på intervallet $[0, 1]$.
För varje fixt $0 \leq x_0 < 1$ gäller

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = \lim_{k\to\infty} x_0^k = 0.$$

Exempel: Betrakta följden $f_k(x) = x^k$ på intervallet $[0, 1]$.
För varje fixt $0 \leq x_0 < 1$ gäller

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x_0) = \lim_{k \to \infty} x_0^k = 0.$$

Vi har även $f_k(1) = 1$ för alla k.

Exempel: Betrakta följden $f_k(x) = x^k$ på intervallet $[0, 1]$.
För varje fixt $0 \leq x_0 < 1$ gäller

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = \lim_{k\to\infty} x_0^k = 0.$$

Vi har även $f_k(1) = 1$ för alla k.
Följden $\{f_k\}$ konvergerar punktvis, mot funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Men konvergensen är inte likformig!

Exempel: Betrakta följden $f_k(x) = x^k$ på intervallet $[0, 1]$.
För varje fixt $0 \leq x_0 < 1$ gäller

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = \lim_{k\to\infty} x_0^k = 0.$$

Vi har även $f_k(1) = 1$ för alla k.
Följden $\{f_k\}$ konvergerar punktvis, mot funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} .$$

Men konvergensen är inte likformig!
Varje f_k är kontinuerlig, med $f_k(0) = 0$ och $f_k(1) = 1$. Enligt satsen om mellanliggande värden finns det för varje k en punkt $0 < y_0 < 1$ där $f_k(y_0) = \frac{2}{3}$.

Viktiga satser om likformig konvergens

Viktiga satser om likformig konvergens

Theorem

Låt $\{f_k\}$ vara en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt på I till en funktion f.

Viktiga satser om likformig konvergens

Theorem

Låt $\{f_k\}$ *vara en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt på* I *till en funktion* f*. Då är* f *kontinuerlig.*

Viktiga satser om likformig konvergens

Theorem

Låt $\{f_k\}$ *vara en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt på* I *till en funktion* f. *Då är* f *kontinuerlig.*

Theorem

Antag att $\{f_k\}$ *är en följd av kontinuerliga funktioner sådana att* $\sum_k f_k(x)$ *konvergerar likformigt på intervallet* $[a, b]$.

Viktiga satser om likformig konvergens

Theorem

Låt $\{f_k\}$ *vara en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt på* I *till en funktion* f. *Då är* f *kontinuerlig.*

Theorem

Antag att $\{f_k\}$ *är en följd av kontinuerliga funktioner sådana att* $\sum_k f_k(x)$ *konvergerar likformigt på intervallet* $[a, b]$. *Då gäller*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$

Viktiga satser om likformig konvergens

Theorem

Låt $\{f_k\}$ vara en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt på I till en funktion f. Då är f kontinuerlig.

Theorem

Antag att $\{f_k\}$ är en följd av kontinuerliga funktioner sådana att $\sum_k f_k(x)$ konvergerar likformigt på intervallet $[a, b]$. Då gäller

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$

- Flera variationer på detta tema.

När konvergerar en funktionsserie?

När konvergerar en funktionsserie?

Theorem (Weierstrass majorantkriterium)

Antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *är en konvergent positiv serie.*

När konvergerar en funktionsserie?

Theorem (Weierstrass majorantkriterium)

Antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *är en konvergent positiv serie.*
Antag att $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *är en följd av funktioner på ett intervall* I *sådana att*

$$|f_k(x)| \leq a_k, \quad x \in I,$$

för varje $k = 1, 2, \ldots$.

När konvergerar en funktionsserie?

Theorem (Weierstrass majorantkriterium)

Antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *är en konvergent positiv serie.*
Antag att $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *är en följd av funktioner på ett intervall* I *sådana att*

$$|f_k(x)| \leq a_k, \quad x \in I,$$

för varje $k = 1, 2, \ldots$.
Då konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *likformigt på intervallet* I.

- Viktig klass av funktionsserier:

När konvergerar en funktionsserie?

Theorem (Weierstrass majorantkriterium)

Antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *är en konvergent positiv serie.*
Antag att $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *är en följd av funktioner på ett intervall* I *sådana att*

$$|f_k(x)| \leq a_k, \quad x \in I,$$

för varje $k = 1, 2, \ldots$.
Då konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *likformigt på intervallet* I.

- Viktig klass av funktionsserier: *potensserier*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k.$$

- Jämför Taylors formel från tidigare kurser.

Ur detta följer:

Ur detta följer:

- Om f ges som summan av en konvergent potensserie så är f kontinuerlig!

Ur detta följer:

- Om f ges som summan av en konvergent potensserie så är f kontinuerlig!

Analytiska funktioner som konvergenta potensserier
Konsekvens av det vi har gått igenom.

Analytiska funktioner som konvergenta potensserier

Konsekvens av det vi har gått igenom.Följande påståenden är ekvivalenta:

Analytiska funktioner som konvergenta potensserier

Konsekvens av det vi har gått igenom.Följande påståenden är ekvivalenta:

- f är en analytisk funktion

Analytiska funktioner som konvergenta potensserier

Konsekvens av det vi har gått igenom.Följande påståenden är ekvivalenta:

- f är en analytisk funktion
- f är komplext deriverbar

Analytiska funktioner som konvergenta potensserier
Konsekvens av det vi har gått igenom.Följande påståenden är ekvivalenta:

- f är en analytisk funktion
- f är komplext deriverbar
- f ges lokalt som summan av en konvergent potensserie.

Analytiska funktioner som konvergenta potensserier
Konsekvens av det vi har gått igenom.Följande påståenden är ekvivalenta:

- f är en analytisk funktion
- f är komplext deriverbar
- f ges lokalt som summan av en konvergent potensserie.

Om en komplex har en derivata har den alla derivator!