MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Föreläsare: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Algebra, Matematik 1, 7.5 hp
den 10 maj 2023

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

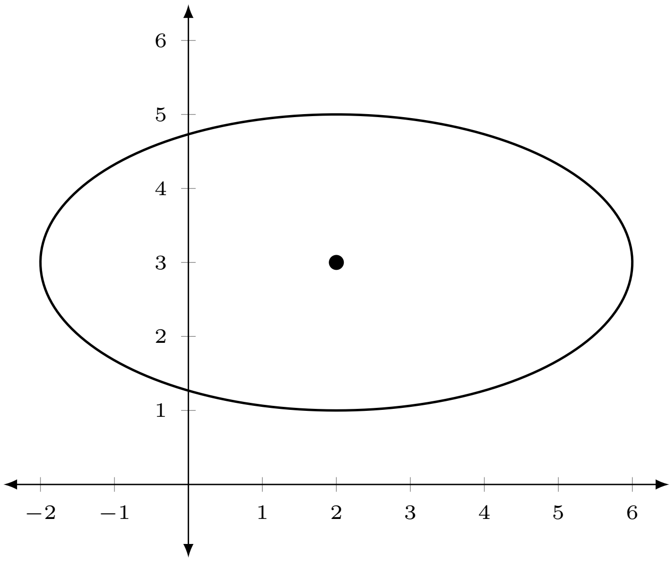
1. (a) Bestäm minsta positiva resten då 2^{33335} delas med 7. (2p)

   (b) Bestäm en lösning till den Diofantiska ekvationen $19x + 17y = 5$. (2p)

   (c) Bestäm det minsta positiva heltal a som gör att den Diofantiska ekvationen $21x + 15y = a$ har lösningar. (1p)

2. (a) Lös ekvationen $5z^3 + 2z^2 + 5z + 2 = 0$. (3p)

   (b) Bestäm en ekvation för den ellips som visas i figuren nedan. (2p)



3. (a) På hur många sätt kan man välja ut tre personer bland sju, och därefter ge en av de tre valda personerna en kaka? *Svara med heltal.* (2p)

   (b) Visa att för heltal $n \geq 3$ gäller det att $3 \cdot \binom{n}{3} = n \cdot \binom{n-1}{2}$. (3p)
   Tips: Använd *inte* induktion för att visa detta.

4. Beräkna determinanten (5p)

$$\begin{vmatrix} 102 & 101 & 101 \\ 100 & 100 & 101 \\ 202 & 200 & 200 \end{vmatrix}.$$

   Tips: Använd räkneregler för att först förenkla determinanten.

Var god vänd!

5. Bestäm skärningslinjen mellan planet $2x + 3y - z + 5 = 0$ och planet som på parameterform ges av $(3, 0, 2) + s(1, -1, 0) + t(0, 1, 2),\ s, t \in \mathbb{R}$. (5p)

6. (a) Låt $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som definieras av (2p)

$$F_1(x, y, z) = (2x + y + z, x - y, 2x + z^2).$$

Är F_1 linjär eller inte? Motivera utifrån definitionen av linjär avbildning!

(b) Låt $F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som definieras av (2p)

$$F_2(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \frac{(0, 1, 2) \cdot \mathbf{u}}{5}(0, 1, 2).$$

Bestäm avbildningsmatrisen för F_2 i standardbasen.

(c) Är avbildningen F_2 inverterbar? (1p)