MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Föreläsare: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Algebra, Matematik 1, 7.5 hp
den 10 maj 2023

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. (a) Bestäm minsta positiva resten då 2^{33335} delas med 7. (2p)
   (b) Bestäm en lösning till den Diofantiska ekvationen $19x + 17y = 5$. (2p)
   (c) Bestäm det minsta positiva heltal a som gör att den Diofantiska ekvationen $21x + 15y = a$ har lösningar. (1p)

Lösning. (a) Vi har att $2^{33335} = 2^2 \cdot (2^3)^{11111} = 4 \cdot 8^{11111}$, och eftersom 8 är kongruent med 1 modulo 7, så är resten vid division med 7 lika med 4.

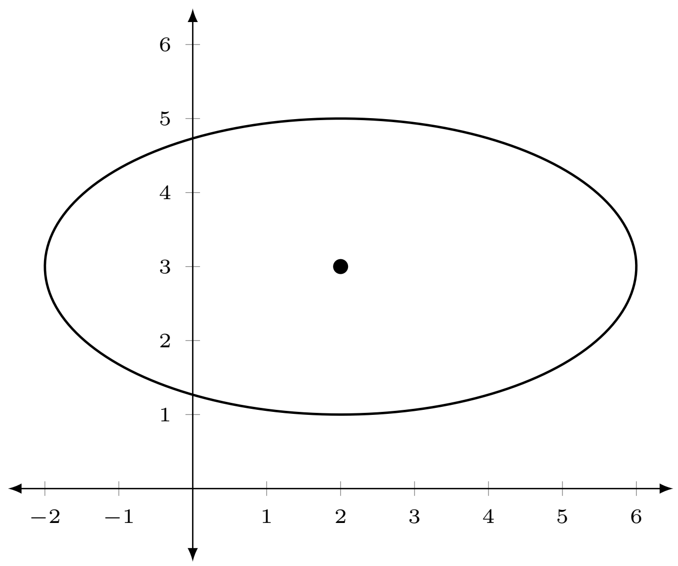
(b) Euklides algoritm på 19 och 17 ger

$$19 = 17 + 2$$
$$17 = 8 \cdot 2 + 1$$

så $1 = 17 - 8 \cdot 2 = 17 - 8(19 - 17) = 19(-8) + 17 \cdot 9$. Alltså är $x = 5(-8) = -40$, $y = 5 \cdot 9 = 45$ en lösning till ekvationen.

(c) Då $\text{sgd}(21, 15) = 3$, finns lösningar om och endast om $3 \mid a$, så $a = 3$.

2. (a) Lös ekvationen $5z^3 + 2z^2 + 5z + 2 = 0$. (3p)
   (b) Bestäm en ekvation för den ellips som visas i figuren nedan. (2p)



Var god vänd!

Lösning. (a) Rationella rotsatsen säger att rationella rötter p/q uppfyller att $p \mid 2$ och $q \mid 5$, så $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}$ är potentiella rötter. Dock, då alla koefficienter är positiva, är bara de negativa alternativen relevanta. Insättning av -1 och -2 ger inga rötter, och inte heller $-\frac{1}{5}$, men

$$5\left(-\frac{2}{5}\right)^3 + 2\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 2 = \frac{-8}{25} + \frac{8}{25} - 2 + 2 = 0,$$

så $z = -\frac{2}{5}$ är en rot, så $(z+2/5)$ är en faktor till polynomet enligt faktorsatsen.

Vi utför nu polynomdivision, och får

$$5z^3 + 2z^2 + 5z + 2 = (5z^2 + 5)(z + \frac{2}{5}).$$

De övriga rötterna ges då av $5z^2 + 5 = 0 \iff z^2 + 1 = 0$ så $z = \pm i$. Sammanfattningsvis har polynomet alltså rötterna $i, -i$ och $-2/5$.

(b) Centrum är $(2, 3)$, och halvaxeln i x-led är 4 lång, medan halvaxeln i y-led är 2 längdenheter. Detta ger ekvationen

$$\frac{(x-2)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1.$$

3. (a) På hur många sätt kan man välja ut tre personer bland sju, och därefter ge en av de tre valda personerna en kaka? *Svara med heltal.* (2p)

   (b) Visa att för heltal $n \geq 3$ gäller det att $3 \cdot \binom{n}{3} = n \cdot \binom{n-1}{2}$. (3p)
   Tips: Använd *inte* induktion för att visa detta.

Lösning. (a) Först väljs de tre personerna, $\binom{7}{3}$, därefter personen som får kakan, 3 sätt. Multiplikationsprincipen ger då $3 \cdot \binom{7}{3} = 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

(b) *Kombinatoriskt bevis:* Vänsterledet räknar antalet sätt att bland n personer välja 3, och därefter ge en av dessa en kaka. I högerledet gör vi valen i omvänd ordning; en av de n personerna får först en kaka, och sedan behöver vi välja två till (utan kaka) att tillhöra 3-gruppen av personer.

I båda led räknar vi alltså sätt att tillverka en 3-grupp från n personer där en person i gruppen har en kaka.

Algebraiskt bevis: Vi har att

$$3\binom{n}{3} = 3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 1} = n\binom{n-1}{2},$$

då vi utnyttjat att $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

4. Beräkna determinanten (5p)

$$\begin{vmatrix} 102 & 101 & 101 \\ 100 & 100 & 101 \\ 202 & 200 & 200 \end{vmatrix}.$$

Tips: Använd räkneregler för att först förenkla determinanten.

Lösning. Vi använder radoperationer, multiplar av mittenraden subtraheras från första och sista:

$$\begin{vmatrix} 102 & 101 & 101 \\ 100 & 100 & 101 \\ 202 & 200 & 200 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 100 & 100 & 101 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Vi kan nu ta mittenkolonnen och dra ifrån båda andra kolonnerna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 100 & 100 & 101 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 100 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Första kolonnen adderas nu till sista, och determinanten blir

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 100 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

där vi i sista steget använde sista kolonnen för att eliminera i näst sista. Utveckling längs med sista raden ger nu att determinanten blir

$$2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Determinantens värde är alltså 2.

5. Bestäm skärningslinjen mellan planet $2x + 3y - z + 5 = 0$ och planet som på parameterform ges av $(3, 0, 2) + s(1, -1, 0) + t(0, 1, 2)$, $s, t \in \mathbb{R}$. (5p)

Lösning. Vi sätter in punkterna i parametriseringen i första planets ekvation. Detta ger

$$2(3+s)+3(t-s)-(2+2t)+5 = 0 \iff 6+2s+3t-3s-2-2t+5 = 0 \iff t-s+9 = 0.$$

Alltså måste vi ha $s = t + 9$. Detta innebär att så länge denna relation gäller, har vi en punkt på skärningslinjen mellan planen. Sätter vi in $s = 9 + t$ får vi en parametrisering av skärningslinjen:

$$(3, 0, 2) + (9 + t)(1, -1, 0) + t(0, 1, 2) = (12, -9, 2) + t(1, 0, 2).$$

Sammanfattningsvis, $(12, -9, 2) + t(1, 0, 2)$ med $t \in \mathbb{R}$ är alltså skärningslinjen.

6. (a) Låt $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som definieras av (2p)

$$F_1(x, y, z) = (2x + y + z, x - y, 2x + z^2).$$

Är F_1 linjär eller inte? Motivera utifrån definitionen av linjär avbildning!

(b) Låt $F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som definieras av (2p)

$$F_2(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \frac{(0, 1, 2) \cdot \mathbf{u}}{5}(0, 1, 2).$$

Bestäm avbildningsmatrisen för F_2 i standardbasen.

(c) Är avbildningen F_2 inverterbar? (1p)

Lösning. (a) Nej. En linjär avbildning måste uppfylla att $F_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F_1(\mathbf{u}) + F_1(\mathbf{v})$ för alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Men tar vi $\mathbf{u} = \mathbf{v} = (0, 0, 1)$ ser vi att

$$\begin{aligned} F_1((0,0,1) + (0,0,1)) = F_1((0,0,2)) = (2, 0, 2^2) = (2, 0, 4), \text{ men} \\ F_1((0,0,1)) + F_1((0,0,1)) = 2 \cdot (1, 0, 1^2) = (2, 0, 2). \end{aligned}$$

Eftersom dessa inte stämmer överens, så är F_1 inte linjär.

(b) Det räcker att beräkna $F_2(\mathbf{e}_1)$, $F_2(\mathbf{e}_2)$ samt $F_2(\mathbf{e}_3)$. Dessa blir kolonnerna i avbildningsmatrisen.

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_1) &= (1, 0, 0) + \frac{0}{5} \cdot (0, 1, 2) = (1, 0, 0) \\ F(\mathbf{e}_2) &= (0, 1, 0) + \frac{1}{5} \cdot (0, 1, 2) = (0, 6/5, 2/5) \\ F(\mathbf{e}_3) &= (0, 0, 1) + \frac{2}{5} \cdot (0, 1, 2) = (0, 2/5, 9/5). \end{aligned}$$

Avbildingsmatrisen blir alltså

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & 9/5 \end{bmatrix}.$$

(c) Ja, den är inverterbar då determinanten av avbildingsmatrisen blir (efter utveckling längs med första raden)

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 6/5 & 2/5 \\ 2/5 & 9/5 \end{vmatrix} = \frac{1}{25}(6 \cdot 9 - 2 \cdot 2) \neq 0.$$