# Kompendium Lösningar

Ludvig Olsson

May 16, 2023

**K1**

**(a)**
Vi har att

$$\frac{\partial}{\partial x}[2xy + i(x^2 - y^2)] = 2y + 2ix,$$

$$-i\frac{\partial}{\partial y}[2xy + i(x^2 - y^2)] = -i(2x - 2iy) = -2ix + 2y.$$

Dessa två uttryck är inte identiskt lika, så $f$ är inte analytisk.

**(b)**
Vi har att

$$\frac{\partial}{\partial x}[2xy + x + i(y^2 + y - x^2)] = 2y + 1 - 2ix,$$

$$-i\frac{\partial}{\partial y}[2xy + x + i(y^2 + y - x^2)] = -i(2x + 2iy + i) = 2y + 1 - 2ix.$$

Dessa två uttryck är identiskt lika och kontinuerliga, så $f$ är analytisk. (Funktionen är $f(z) = z - iz^2$).

**(c)**
Vi har att

$$\frac{\partial}{\partial x}[x^2 - y^2 + i(x^2 + y^2)] = 2x + 2ix,$$

$$-i\frac{\partial}{\partial y}[x^2 - y^2 + i(x^2 + y^2)] = 2y + 2iy.$$

Dessa två uttryck är inte identiskt lika, så $f$ är inte analytisk.

**(d)**
Vi har att

$$\frac{\partial}{\partial x}[-e^x \sin y + ie^x \cos y] = -e^x \sin y + ie^x \cos y,$$

$$-i\frac{\partial}{\partial y}[-e^x \sin y + ie^x \cos y] = -i(-e^x \cos y - ie^x \sin y) = -e^x \sin y + ie^x \cos y.$$

Dessa två uttryck är identiskt lika och kontinuerliga, så $f$ är analytisk. (Funktionen är $f(z) = ie^z$).

**K2**
En global primitiv funktion till $f(z) = ze^{z^2}$ ges av $F(z) = e^{z^2}/2$, alltså gäller

$$\int_\Gamma ze^{z^2} dz = F(z(\pi)) - F(z(0)) = \frac{1}{2}(e^{\pi^2} - 1).$$

**Cauchys Integralformel**
I följande uppgift använder jag mig mycket av Cauchys integralformel. Om $f(z)$ är analytisk inuti en cirkel $\Gamma$, och $z_0$ ligger inuti $\Gamma$, så gäller

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)} = 2\pi i f(z_0).$$

**K3**
Funktionen $f(z) = 1/z$ har en singularitet i punkten $z = 0$ som ligger inuti ellipsen. Eftersom integraler över analytiska funktioner är vägoberoende kan vi begränsa oss till en cirkel $\Gamma_1$ kring origo, och vi får enligt Cauchys integralformel

$$\int_{\Gamma_1} = 2\pi i.$$

**K4**

**(a)**
Funktionen $f(z) = (3z-2)/(z^2-z)$ har singulariteter då $0 = z^2 - z = z(z-1)$ vilket händer då $z_0 = 0, 1$. Om $\Gamma$ är cirkeln $|z| = 1/2$ ligger endast $z_0 = 0$ inuti $\Gamma$, så vi kan enligt Cauchys integralformel räkna

$$\int_\Gamma \frac{3z-2}{z^2-z}dz = \int_\Gamma \frac{(3z-2)/(z-1)}{z}dz = 2\pi i \cdot (3\cdot 0-2)/(0-1) = 4\pi i.$$

**(b)**
Om $\Gamma$ istället är cirkeln $|z| = 2$ delar vi upp integralen i två bitar, en liten cirkel $\Gamma_1$ kring $z_0 = 0$ och en liten cirkel $\Gamma_2$ kring $z_0 = 1$, så vi kan enligt Cauchys integralformel räkna

$$\int_\Gamma \frac{3z-2}{z^2-z}dz = \int_{\Gamma_1} \frac{(3z-2)/(z-1)}{z}dz + \int_{\Gamma_2} \frac{(3z-2)/z}{(z-1)}dz$$
$$= 2\pi i \cdot (3\cdot 0-2)/(0-1) + 2\pi i \cdot (3\cdot 1-2)/1 = 4\pi i + 2\pi i = 6\pi i.$$

**K5**

Enligt Cauchys integralformel har vi

$$\int_\Gamma \frac{z^2 e^z}{2z+i}dz = \int_\Gamma \frac{z^2 e^z/2}{z+i/2}dz = 2\pi i(-i/2)^2 e^{-i/2}/2 = \frac{\pi i e^{-i/2}}{4}.$$

**K6**

Funktionen $\cos z/(z^3+9z)$ har tre singulariteter

$$z^3+9z=0 \iff (z+3i)(z-3i)z=0 \iff z\in\{0,3i,-3i\}.$$

Endast $z=0$ ligger inuti $\gamma$. Enligt Cauchys integralformel

$$\int_\Gamma \frac{\cos z}{z^3+9z}dz=\int_\Gamma \frac{\cos z/(z^2+9)}{z}dz=2\pi i\cos 0/(0^2+9)=\frac{2\pi i}{9}.$$

**K7**

**Integraler över reella polynom**
Om vi är intresserade av en integral på formen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}dx$$

där $p$ och $q$ är polynom och $q$ har grad åtminstone 2 större än $p$, kan vi göra det på följande vis.

Vi integrerar över en halvcirkel $\Gamma_R$ av radie $R$ på det komplexa planet och center i origo, och vi låter $C_R$ vara den övre delen av halvcirkel. Då gäller

$$\int_{\Gamma_R}\frac{p(z)}{q(z)}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(z)}{q(z)}dz+\int_{C_R}\frac{p(z)}{q(z)}dz.$$

Det går att visa att integralen över $C_R$ går mot 0, så vi får

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{p(z)}{q(z)}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(z)}{q(z)}dz$$

Högerledet blir konstant då $R$ är så stor att det innehåller alla singulariteter av $\frac{p(z)}{q(z)}$ på övre halvplanet, eller med andra ord alla nollställen till $q(z)$ på övre halvplanet.

**K8**

Funktionen $1/(z^2+1)(z^2+4)$ har singulariteter då $z=\pm i,\pm 2i$. Endast punkterna $z=i,2i$ ligger på övre halvplanet. Enligt resonemanget ovan får vi för tillräckligt stort $R$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz=\int_{\Gamma_R}\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz.$$

Vi delar upp i en cirkel $\Gamma_1$ kring $i$ och en cirkel $\Gamma_2$ kring $2i$ och får enligt Cauchys integralformel

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{1/(z+i)(z^2+4)}{(z-i)} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{1/(z+2i)(z^2+1)}{(z-2i)} dz$$

$$= 2\pi i \cdot 1/(i+i)(i^2+4) + 2\pi i \cdot 1/(2i+2i)((2i)^2+1) = \pi(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) = -\frac{\pi}{6}.$$

**K9**

Funktionen $1/(z^4+4)$ har singulariteter då $z^4 = -4$. Genom att använda polära koordinater kan man ta fram lösningar $z = \pm 1 \pm i$. Endast punkterna $z = \pm 1 + i$ ligger på övre halvplanet. Enligt resonemanget ovan får vi för tillräckligt stort $R$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z^4+4)} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^4+1)} dz.$$

Vi delar upp i en cirkel $\Gamma_1$ kring $1+i$ och en cirkel $\Gamma_2$ kring $1-i$ och får enligt Cauchys integralformel

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z^4+4)} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{1/(z-1+i)(z^2+2z+2)}{(z-1-i)} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{1/(z-1+i)(z^2-2z+2)}{(z+1-i)} dz$$

$$= 2\pi i \cdot 1/(1+i-1+i)((1+i)^2+2(1+i)+4)) + 2\pi i \cdot 1/(-1+i+1+i)((i-1)^2-2(i-1)^2+4))$$

$$\frac{\pi}{8}(1+i) + \frac{\pi}{8}(1-i) = \frac{\pi}{4}.$$

**K10**

**K11**

**(a)**

Vi har att

$$\left| \frac{\sin kx}{k} \right| \le \frac{1}{k}.$$

Eftersom högerledet inte beror på $x$ och går mot 0 konvergerar serien likformigt mot 0.

**(b)**

Vi har att

$$\left| (-1)^k \frac{\arctan kx}{\sqrt{k}} \right| \le \frac{\pi}{2\sqrt{k}}.$$

Eftersom högerledet inte beror på $x$ och går mot 0 konvergerar serien likformigt mot 0.

**(c)**
Vi använder Weierstrass Majoranttest och ser att

$$\left|(-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}.$$

Eftersom serien $\sum 1/k^2$ konvergerar konvergerar den ursprungliga serien likformigt.

**(d)**
Vi använder Weierstrass Majoranttest och ser att

$$\left|(-1)^k \frac{\sin^2 x/k}{k^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{k^{3/2}}.$$

Eftersom serien $\sum 1/k^{3/2}$ konvergerar konvergerar den ursprungliga serien likformigt.

**K12**

**(a)**
Serien $f_k(x) = x^k(1-x^k)$ konvergerar punktvis mot 0, så om den konvergerar likformigt konvergerar den mot 0. Betrakta sekvensen $x_k = (1/2)^{1/k}$. Vi har att $f_k(x_k) = 1/2 \cdot (1-1/2) = 1/4$, så vi kan aldrig garantera att $|f_k(x)| < 1/4$, oavsett hur stort vi gör $k$. Alltså konvergerar inte $f_k(x)$ likformigt.

**(b)**
Jag påstår att serien konvergerar likformigt mot 1. Vi har att

$$\left|\frac{kx}{1+kx} - 1\right| = \frac{1}{1+kx} \leq \frac{1}{1+k}$$

Vi använder i sista olikheten att $x \geq 1$. Eftersom högerledet inte beror på $x$ och går mot 0 är vi färdiga.

**(c)**
Serien $f_k(x) = kx/(1+kx)$ konvergerar punktvis mot 1, så om den konvergerar likformigt konvergerar den mot 0. Betrakta sekvensen $x_k = 1/k$. Vi har att $|f_k(x_k) - 1| = 1 - 1/2 = 1/2$, så vi kan aldrig garantera att $|f_k(x)| < 1/2$, oavsett hur stort vi gör $k$. Alltså konvergerar inte $f_k(x)$ likformigt.

**(d)**
Jag påstår att serien konvergerar likformigt mot 0. Funktionen $f(x) = x/e^x$ är avtagande då $x \geq 1$, eftersom $f'(x) = (1-x)e^{-x}$. Vi har att

$$\left|\frac{kx}{e^{kx}}\right| = \frac{kx}{e^{kx}} \leq \frac{k}{e^k}.$$

Vi använder i sista olikheten att $x \geq 1$. Eftersom högerledet inte beror på $x$ och går mot 0 är vi färdiga.

**(e)**
Serien $f_k(x) = kx/(e^{kx})$ konvergerar punktvis mot 0, så om den konvergerar likformigt konvergerar den mot 0. Betrakta sekvensen $x_k = 1/k$. Vi har att $|f_k(x_k)| = 1/e^1 = 1/e$, så vi kan aldrig garantera att $|f_k(x)| < 1/e$, oavsett hur stort vi gör $k$. Alltså konvergerar inte $f_k(x)$ likformigt.

**(f)**
Serien $f_k(x) = kx^k(1-x)$ konvergerar punktvis mot 0, så om den konvergerar likformigt konvergerar den mot 0. Betrakta sekvensen $x_k = 1 - 1/k$. Vi har att $|f_k(x_k)| = k(1-1/k)^k 1/k = (1-1/k)^k$. Sekvensen går mot $e$ då $k$ går mot oändligheten (standardgränsvärde) så vi kan aldrig garantera att $|f_k(x)| < e$, oavsett hur stort vi gör $k$. Alltså konvergerar inte $f_k(x)$ likformigt.

**(g)**
Funktionen $f_k(x) = kx^k(1-x)$ är ökande på intervallet $[0, a)$ om $a < k/(k+1)$, eftersom derivatan är $f_k'(x) = kx^{k-1}(k - (k+1)x)$. Alltså är

$$|kx^k(1-x)| = kx^k(1-x) \leq ka^k(1-a).$$

Eftersom högerledet inte beror på $x$ och går mot 0 konvergerar vår serie likformigt mot 0.

**K13**

**(a)**
Vi har att

$$\left|\frac{x^2}{1+k^2x^2}\right| = \frac{x^2}{1+k^2x^2} \leq \frac{a^2}{1+k^2a^2} = \frac{1}{a^{-2}+k^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Summan $\sum 1/k^2$ konvergerar, så vår ursprungliga serie konvergerar enligt Weierstrass Majoranttest.

**(b)**
Vi har att

$$\left|\frac{x + \sin kx}{1+k^2}\right| \leq \frac{|x|+1}{1+k^2} \leq \frac{a+1}{1+k^2} \leq \frac{a+1}{k^2}.$$

Summan $(a+1)\sum 1/k^2$ konvergerar, så vår ursprungliga serie konvergerar enligt Weierstrass Majoranttest.

**K14**
Vi har att

$$\left|\frac{x^{2k}}{(k+x)^2}\right| \le \frac{1}{(k+x)^2} \le \frac{1}{k^2}.$$

Summan $\sum 1/k^2$ konvergerar, så vi får likformig konvergens enligt Weierstrass Majorantsats.

**K15**
Skillnaden mellan två på varandra element i sekvensen är $x^2/k^2$, och $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^2/k^2|$ måste gå mot 0 då $k$ går mot oändligheten om sekvensen ska konvergera. Men $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^2/k^2| \ge |k^2/k^2| = 1$, så serien kan inte konvergera likformigt.

**K16**
Vi har

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2(1-x/2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(x/2)^k.$$

Serien konvergerar för $x$ om och endast om $\sum y^k$ konvergerar för $y = x/2$. Alltså konvergerar vår serie för $x \in (-2, 2)$.

**K17**
Vi har

$$\frac{x^3}{1-2x^2} = \frac{x^3}{2}\frac{1}{1-(\sqrt{2}x)^2} = \frac{x^3}{2}\sum_{k=1}(\sqrt{2}x)^{2k} = \sum_{k=1}\frac{(\sqrt{2}x)^{2k+3}}{2}.$$

Konvergensradien i det här fallet är samma som konvergensradien av den mittersta serien, som är

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{(a_{2k})^{1/2k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{((\sqrt{2})^{2k})^{1/2k})} = 1/\sqrt{2}.$$

Undersöker vi randpunkterna $x = \pm 1/\sqrt{2}$ får vi den harmoniska serien $\sum 1/k$ som divergerar. Alltså konvergerar vår serie på intervallet $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

**K18**
Konvergensradien för serien ges av

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+2)(k+1)}{(k+1)k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1+2/k}{=}1.$$

Om $x = \pm 1$ går termerna i summan $\sum k(k+1)(\pm 1)^k$ inte mot 0, så vi har inte konvergens i det fallet. Alltså konvergerar vår serie då $x \in (-1, 1)$.

**K19**

Notera att
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} = f(1/2), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i+1)^k k^2}{2^k} = f((i+1)/2)$$
där
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k k^2.$$
Vi vill alltså uttrycka $f$ på en sluten form. Betrakta
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$
Deriverar vi båda sidor får vi
$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k.$$
Deriverar vi båda sidor igen får vi
$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)^k.$$
Notera att
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k - 3\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1 - 3(k+1) + (k+2)(k+1))x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = f(x).$$
Alltså gäller
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - 3\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)^k$$
$$= \frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$
Notera att konvergensradien för serien $f(x)$ är 1, och eftersom $1/2$ och $(i+1)/2$ ligger inuti den konvergensradien kommer $f$ att konvergera för dessa värden. Vi får sist men inte minst
$$f(1/2) = \frac{1/2(1/2+1)}{(1-1/2)^3} = 6, \quad f((i+1)/2) = -3 - i.$$

**K20**

Betrakta potensserien

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 ... = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Vi integrerar båda sidor och får

$$-\ln|1-x| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Vi har också att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

och att

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = x^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+3}.$$

Tillsammans ger det här

$$-\ln|1-x| = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+3}$$

$$\iff -\ln|1-x| - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = x^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+3}$$

$$\iff -\frac{\ln|1-x|}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+3}.$$

Serien har konvergensradie

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{k+3}\right|^{-1/k} = 1.$$

Alltså konvergerar serien för $|x| < 1$, och divergerar för $|x| > 1$. Om $x = 1$ får vi den vanliga harmoniska serien

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

och om $x = -1$ får vi en alternerande serie vars termer går mot noll, vilket konvergerar enligt Leibniz kriterium. Alltså konvergerar serien för $-1 \leq x < 1$.

**K21**
Vi använder oss av följande två formler. Låt $\Gamma$ vara en enkel sluten kurva. Om $f$ är analytisk inuti $\gamma$ och $a$ ligger inuti $\gamma$ gäller att

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a). \tag{1}$$

Och även att

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-a)^n}dz = 0. \tag{2}$$

där $n > 1$.

**(a)**
Notera att singulariteten i $z = 0$ ligger inuti $\Gamma$. Vi expanderar

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + z^3 g(z)$$

där $g(z)$ är en analytisk funktion. Vi får

$$\frac{\cos(z)}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + g(z).$$

Alltså gäller

$$\int_\Gamma \frac{\cos(z)}{z^3}dz = \int_\Gamma \frac{1}{z^3}dz - \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{1}{z}dz + \int_\Gamma g(z)dz.$$

Den sista av dessa integraler är 0 enligt Cauchys sats, den första är 0 enligt (2), och den mittersta integralen är $2\pi i$ enligt (1). Alltså får vi

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^3}dz - \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{1}{z}dz + \int_\Gamma g(z)dz = -\frac{1}{2}2\pi i = -\pi i.$$

**(b)**
Notera att singulariteten i $z = 1$ ligger inuti $\Gamma$. Vi expanderar

$$e^z = e^1(e^{z-1}) = e\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^k}{k!} = e + e(z-1) + (z-1)^2 g(z)$$

där $g(z)$ är en analytisk funktion. Vi får

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + g(z).$$

Alltså gäller

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{(z-1)^2}dz = e\int_\Gamma \frac{1}{(z-1)^2}dz + e\int_\Gamma \frac{1}{z-1}dz + \int_\Gamma g(z)dz.$$

Den sista av dessa integraler är 0 enligt Cauchys sats, den första är 0 enligt (2), och den mittersta integralen är $2\pi i$ enligt (1). Alltså får vi

$$e\int_\Gamma \frac{1}{(z-1)^2}dz + e\int_\Gamma \frac{1}{z-1}dz + \int_\Gamma g(z)dz = 0 + e2\pi i + 0 = 2\pi i e.$$

**(c)**
Notera att singulariteten i $z = \pi i/2$ ligger inuti $\Gamma$. Vi expanderar

$$e^z = e^{\pi i/2}(e^{z-\pi i/2}) = i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^k}{k!} = i + i(z-\pi i/2) + (z-\pi i/2)^2 g(z)$$

där $g(z)$ är en analytisk funktion. Notera att $e^{\pi i/2} = i$. Vi får

$$\frac{e^z}{(z-\pi i/2)^2} = \frac{i}{(z-\pi i/2)^2} + \frac{i}{z-\pi i/2} + g(z).$$

Alltså gäller

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{(z-\pi i/2)^2}dz = i\int_\Gamma \frac{1}{(z-\pi i/2)^2}dz + i\int_\Gamma \frac{1}{z-\pi i/2}dz + \int_\Gamma g(z)dz.$$

Den sista av dessa integraler är 0 enligt Cauchys sats, den första är 0 enligt (2), och den mittersta integralen är $2\pi i$ enligt (1). Alltså får vi

$$i\int_\Gamma \frac{1}{(z-1)^2}dz + i\int_\Gamma \frac{1}{z-1}dz + \int_\Gamma g(z)dz = 0 + i2\pi i + 0 = -2\pi.$$

**K23**
Enligt Cauchy-Riemann ekvationerna gäller

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

och

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Men då gäller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

En liknande uträkning fungerar för $v$.

**K24**

**(a)**
Vi vill att denna analytiska funktion ska ha $u = 2xy$, så vi får därmed

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2y$$

från vilket det följer att $v = y^2 + f(x)$. På samma sätt får vi

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2x$$

så $v = -x^2 + g(y)$. Lägger vi ihop de två påståendena får vi $v = y^2 - x^2 + C$, vi kan till exempel välja $C = 0$ och då får vi en analytisk funktion

$$f(z) = f(x+iy) = 2xy + i(y^2 - x^2) = -i(2ixy + x^2 - y^2) = -i(x+iy)^2 = -iz^2.$$

**(b)** Enligt K23 måste

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

men i vårt fall gäller

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$