Inlämning 2 Lösningsförslag

Ludvig Olsson

May 20, 2023

Uppgift 1

(a)
Ett konservativt vektorfält $F = (P, Q)$ uppfyller

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

I vårt fall har vi

$$\frac{\partial}{\partial y}[\cos x + y(\cos x + \cos(xy))] = -xy\sin(xy) + \cos(xy) + \cos(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\sin y + x(\cos(xy) - \sin(y))] = -xy\sin(xy) + \cos(xy) - \sin(y).$$

De här funktionerna är inte lika som vi kan se genom att utvärdera i punkten $(x, y) = (0, 0)$. Alltså är F inte konservativt.

(b)
Ett konservativt vektorfält $F = (P, Q)$ uppfyller

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

I vårt fall har vi

$$\frac{\partial}{\partial y}[e^{xy^2-x}(xy+1)] = e^{xy^2-x}(2x^2y^2 + xy + x - 1),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[e^{xy^2-x}(2x^2y - x)] = e^{xy^2-x}(2x^2y^3 - xy^2 + 4xy - 1).$$

De här funktionerna är inte lika som vi kan se genom att utvärdera i punkten $(x, y) = (1, 0)$. Alltså är F inte konservativt.

(c)
Vektorfältet är odefinierat då $1 = -xy^2$, tex i punkten $(-1, 1)$, så vektorfältet är inte definierat i $\mathbb{R}^2$. Alltså går det inte att prata om att F är konservativt i $\mathbb{R}^2$.

Uppgift 2
Ett vektorfält $F = (P, Q)$ i ett enkelt sammanhängande område D som uppfyller
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$
är konservativt och har därmed en potential U. I vårt fall har vi
$$\frac{\partial}{\partial x}[x^3 - 2xy - x\sin(xy) + 1] = 3x^2 - 2y - \sin(xy) - xy\cos(xy),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}[3x^2y - y^2 - y\sin(xy)] = 3x^2 - 2y - \sin(xy) - xy\cos(xy).$$
Dessutom är F definierat i $\mathbb{R}^2$ vilket är ett enkelt sammanhängande område, så det finns en potential U till F. Vi får nu
$$\int_\gamma F \cdot dr = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = U(0,1) - U(0,1) = 0.$$

Uppgift 3
Vi vill använda Gauss sats, men ytan S är inte sluten, så vi definierar
$$S_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 9, z = 0\}, \quad K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 9, z \geq 0\}.$$
Vi ser att $\partial K = S \cup S_0$, så vi kan använda Gauss sats och får
$$\iint_S u \cdot N dS + \iint_{S_0} u \cdot N dS = \iiint_K div(u) dxdydz.$$

Vi räknar först ut integralen över S_0. Vi parametriserar S_0 som
$$r(x,y) = (x,y,0), \quad x^2 + y^2 \leq 9.$$
Det ger oss normalen
$$r_y \times r_x = (0,0,-1).$$
Eftersom vi räknar flödet ut ur halvsfären S vill vi att normalen ska peka ut ur kroppen K, eftersom normalen vi räknat ut pekar nedåt är det rätt riktning. Vi får
$$\iint_{S_0} u \cdot N dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} u(r(x,y)) \cdot (r_y \times r_x) dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 9} (x^3+y^{17}, y^3-101, x)\cdot(0,0,-1)dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 9} -xdxdy.$$

Eftersom $-x$ är udda och området $x^2+y^2 \leq 9$ är symmetrisk i y-axeln blir integralen 0.

Vi räknar nu ut integralen över K. Vi får

$$div(u) = 3x^2+3y^2+3z^2,$$

alltså får vi

$$\iiint_K divudxdydz = 3\iiint_K (x^2+y^2+z^2)dxdydz.$$

Vi byter till sfäriska koordinater. Kraven $x^2+y^2+z^2 \leq 9$ blir $r \leq 3$ och $z \geq 0$ blir $\theta \leq \pi/2$. Sammanlagt får vi

$$3\iiint_K (x^2+y^2+z^2)dxdydz = 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 r^4\sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int_0^3 r^4dr = 3\cdot 2\pi\cdot 1\cdot\frac{3^5}{5} = \frac{1458\pi}{5}.$$