STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematik
Föreläsare: P. Alexandersson
Examinator: S. Lundqvist

Tentamen i
Algebra och kombinatorik
17 maj 2023 kl $14^{00} - 19^{00}$

Enbart skrivdon tillåtna. Alla svar ska motiveras noga.

Uppgift 1. Svara på följande frågor.

(a) Finn alla lösningar till $2x + 2y = 1$ i $\mathbb{Z}_3$.

(b) Från primtalen $p = 7$ och $q = 11$, bestäm en krypteringsnyckel e för användning i RSA.

(c) Hur många delgrupper har $\mathbb{Z}_{29}$?

(d) Ge exempel på en permutation i S_5 som har ordning 6. Ange svaret på tvåradsform.

(e) Rita en graf med kromatiskt tal 4 och som saknar Hamiltonstig.

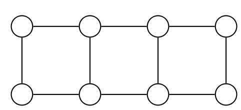
Uppgift 2. (a) För vilka värden på parametern $b \in \mathbb{Z}_3$ är polynomet $x^2 + 2x + b \in \mathbb{Z}_3[x]$ irreducibelt?

(b) Låt X vara mängden av moniska andragradspolynom i $\mathbb{Z}_3[x]$. Definiera relationen $\sim$ på X där $P, Q \in X$ uppfyller

$$P \sim Q \text{ precis då } P(1)^2 = Q(1)^2.$$

Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation samt skriv ned alla polynom i X som är i relation med polynomet $x^2 + x + 1$.

Uppgift 3. Tre kvadrater har placerats i rad, så att en graf med 8 hörn har bildats.



Hörnen kan färgas vita eller svarta och grannar får ha samma färg.

(a) Hur många färgläggningar finns det totalt?

(b) Hur många färgläggningar uppfyller att den vänstra kvadraten är *monokromatisk*, dvs. alla fyra hörn har samma färg?

(c) Hur många färgläggningar uppfyller att ingen av de tre kvadraterna är monokromatisk?

Alla svar ska beräknas till ett heltal.

Vänligen vänd!

Uppgift 4. Låt G vara mängden av matriser på formen $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix}$ där $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ och $y \in \mathbb{Q}$.

(a) Visa att G är en grupp under matrismultiplikation.

(b) Visa att det inte finns något element i G som har ordning 3.

Uppgift 5. Låt X vara mängden som består av alla sätt att fylla de 8 rutor arrangerade i en kvadrat med någon av symbolerna i $\{\times, \circ, \bullet\}$. Ett exempel på en sådan figur är följande:

$\circ$	$\bullet$	$\times$
$\circ$		$\bullet$
$\times$	$\circ$	$\bullet$

Mittenrutan är alltid tom.

(a) Bestäm det totala antalet element i X.

(b) Den cykliska gruppen $G = \{e, r, r^2, r^3\}$ verkar på X genom att r roterar figuren $90°$ moturs. Rita en figur som tillhör $\mathrm{Fix}(r^2)$ men som inte tillhör $\mathrm{Fix}(r)$.

(c) Bestäm antalet banor under G. Svaret behöver inte förenklas.

Uppgift 6. Kom ihåg att $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. En funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kallas för *ökande* om $f(n) \leq f(n+1)$ för alla $n \geq 1$.

(a) Hur många ökande funktioner $f : \mathbb{N} \to \{1, 2\}$ finns det som uppfyller $f(1) = 1$ och $f(5) = 2$?

(b) Visa att mängden av ökande funktioner $f : \mathbb{N} \to \{1, 2\}$ är uppräknelig.

(c) Visa att mängden av ökande funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *inte* är uppräknelig.

Notera att i (c) får nu f anta värden i $\mathbb{N}$.