Inlämning 3 Lösningsförslag

Ludvig Olsson

May 22, 2023

Problem 1

(a)
Vi använder kvotkriteriet och får

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{(k+2)^2}{(k+1)^2}| = \lim_{k\to\infty} \frac{(1+2/k)^2}{(1+1/k)^2} = 1.$$

Alltså är konvergensradien $R = 1$.

För att få ett slutet uttryck för summan märker vi att

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^2 x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)x^k.$$

Enligt uppgift (b) vet vi vad den första summan är, och för den andra summan gäller

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^{k+1}) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=2}^{\infty} x^k\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right) = \frac{1}{(1-x)^2} - 1.$$

Slår vi ihop de två summorna får vi

$$\frac{1}{(1-x)^2} - 1 + \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

(b)
Vi använder kvotkriteriet och får

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty} |\frac{(k+2)(k+1)}{(k+1)k}| = \lim_{k\to\infty} (1 + 2/k) = 1.$$

Alltså har vår serie konvergensradie $R = 1$.

Vi beräknar också

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k{+}1)kx^k = x\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kx^{k-1}\right) = x\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}x^{k+1}\right) = x\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+2}\right)$$

$$= x\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right) = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

(c)
Vi använder kvotkriteriet och får

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty}|\frac{(k+2)!/(k+1)!^2}{(k+1)!/(k!)^2}| = \lim_{k\to\infty}|\frac{(k+2)!(k!)^2}{(k+1)!^3}|$$

$$= \lim_{k\to\infty}|\frac{(k+2)}{(k+1)^2}| = 0.$$

Alltså är $R = \infty$ så serien konvergerar överallt.

Vi beräknar

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)!}{(k!)^2}x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k!}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$$

$$= x\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}x^{k-1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\right) - 1 = x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}x^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\right) - 1$$

$$= xe^x + e^x - 1.$$

Problem 2

(a)
Polynomet $z^3{+}z^2{+}z = z(z^2{+}z{+}1)$, och $z^2{+}z{+}1$ har lösningar $z = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$.

Genom att faktorisera

$$z^3 + z^2 + z = z\left(z + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right),$$

ser vi att integranden har singulariteter då $z = 0, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Alla tre av dessa singulariteter ligger inuti Γ. Enligt Residysatsen får vi

$$\int_\Gamma \frac{1}{z^3+z^2+z}dz$$

$$= 2\pi i \left(\left[\frac{1}{(z^2+z+1)}\right]_{z=0} + \left[\frac{1}{z(z+\frac{1+i\sqrt{3}}{2})}\right]_{z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} + \left[\frac{1}{z(z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2})}\right]_{z=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}} \right)$$

$$= 2\pi i \left(1 + \frac{1}{(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})(i\sqrt{3})} + \frac{1}{(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})(-i\sqrt{3})}\right)$$

$$= 2\pi i(1 + \frac{-i-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{i-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}) = 2\pi i(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 0.$$

(b)
Vi faktoriserar $z^3 + 3z^2 + 4z + 12 = (z-3)(z^2+4) = (z-3)(z+2i)(z-2i)$ (man kan gissa första roten och sen är det enkelt att faktorisera). Alltså har vår integrand singularieteter då $z = 3, 2i, -2i$. Dessa singulariteter ligger inte inuti Γ, så integranden är analytisk inuti Γ. Alltså är integralen är 0 enligt Cauchys integralsats.

Problem 3
Vi Taylorutvecklar y kring $x = 1$, och skriver

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n.$$

Deriverar vi får vi

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(x-1)^n.$$

Vi stoppar in det i vår differentialekvation och får

$$((x+1)y'(x)+3y(x) = 0 \iff ((x-1)+2)\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(x-1)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = 0$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)(x-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(3a_n + 2(n+1)a_{n+1})(x-1)^n = 0$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(3a_n + 2(n+1)a_{n+1})(x-1)^n = 0.$$

Vi undersöker vad som händer med koefficienten framför $(x-1)^n$

$$na_n + 2(n+1)a_{n+1} + 3a_n = 0 \iff a_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{(n+3)}{(n+1)}a_n.$$

Kravet $y(1) = 3$ blir $a_0 = 3$, så vi får

$$a_n = (-1)\frac{1}{2}\frac{(n+2)}{n}\cdot(-1)\frac{1}{2}\frac{n+1}{(n-1)}\cdot\ldots\cdot(-1)\frac{1}{2}\frac{4}{2}a_0 = (-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{(n+2)(n+1)}{2}3.$$

Alltså får vi

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{3(n+2)(n+1)}{2}(x-1)^n.$$

Vill vi hitta en sluten formel för y skriver vi

$$y(x) = \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\left(\frac{1-x}{2}\right)^n = \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)t^n = \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^2}{dt^2}[t^{n+2}]$$

$$= \frac{3}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+2}\right] = \frac{3}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{1}{1-t} - 1 - t\right] = \frac{3}{(1-t)^3}.$$

Här är $t = \frac{1-x}{2}$. Vi stoppar in i ekvationen ovan och får

$$y(x) = \frac{3}{(1-t)^3} = \frac{24}{(x+1)^3}.$$