MATEMATIK II ANALYS DEL B, HT 2022
INLÄMNINGSUPPGIFT 1:
LÖSNINGSFÖRSLAG

ALAN SOLA

Uppgifterna nedan inlämnas senast fredag 18 november.

Uppgift 1

Låt

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}.$$

Avgör för vilka $p > 0$ dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{1}{(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4)^p} dxdy$$

är konvergent.

(Ledning: Undersök symmetrier hos integranden för att hitta ett eller flera variabelbyten som förenklar integralen.)

Lösningsförslag: Vi observerar först att uttrycket som föreligger i integrandens nämnare är homogent att ordning 4. Detta antyder att polynomet i fråga borde kunna skrivas som ett polynom upphöjt till en jämn potens. Vidare är polynomet symmetriskt i x och y. Vägledda av dessa observationer inser vi att vi har

$$P(x, y) = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)^2.$$

Låt oss införa variablerna

$$u = x + y \quad \text{och} \quad v = x - y.$$

Vi får då

$$P(x(u, v), y(u, v)) = \frac{1}{16}(3u^2 + v^2)^2$$

och har funktionaldeterminanten

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Vi är nu redo att undersöka den givna generaliserade integralen. Vi genomför variabelbytet ovan och erhåller

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4)^p} = \frac{1}{8} \iint_E \frac{1}{(3u^2 + v^2)^{2p}} dudv,$$

där E är en delmängd av (u, v)-planet som omsluter origo. En vidare omskalning $w = \sqrt{3}u$ ger att

$$\frac{1}{8}\iint_E \frac{1}{(3u^2+v^2)^{2p}}dudv = \frac{1}{8\sqrt{3}}\iint_F \frac{1}{(w^2+v^2)^{2p}}dwdv.$$

Området F är urbilden av D under dessa två variabelbyten och är en öppen mängd som innehåller origo.

Vi observerar att integralens konvergens endast beror av integrandens beteende nära origo. Således är integralen till höger konvergent om och endast om

$$\iint_{\{w^2+v^2\leq R^2\}} \frac{dwdv}{(w^2+v^2)^{2p}}$$

konvergerar för små $R > 0$. När vi nu inför polära koordinater fås den generaliserade envariabelintegralen

$$\int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r^{4p}} rdrd\theta = 2\pi \int_0^R \frac{dr}{r^{4p-1}}.$$

Integralen till höger är konvergent om och endast om $4p - 1 < 1$, alltså när $p < \frac{1}{2}$.

Den generaliserade dubbelintegralen konvergerar alltså om och endast om $p < \frac{1}{2}$.

Uppgift 2

Beskriv den kropp som definieras av

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ z \leq 1\}$$

samt beräkna dess volym.

Lösningsförslag: Kroppen K är en del av et klot med radie 2: närmare bestämt betraktar vi ett halvklot, med borttagen nordkalott.

Volymen av denna kropp kan beräknas med hjälp av dubbelintegralen $\int_K dxdydz$, vars värde vi bestämmer med itererad integration. Vi har att $-2 \leq z \leq 1$, och för varje fixt sådant z gäller $x^2 + y^2 \leq 4 - z^2$.

$$\int_K dxdydx = \int_{-2}^{1}\left(\iint_{\{x^2+y^2\leq 4-z^2, x\geq 0\}} dxdy\right) dz.$$

I polära koordinater får vi

$$\iint_{\{x^2+y^2\leq 4-z^2, x\geq 0\}} dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{4-z^2}} rdrd\theta = \pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-z^2}} = \frac{\pi}{2}(4-z^2).$$

Slutligen fås

$$\int_K dxdydz = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{1}(4-z^2)dz = \frac{\pi}{2}\left[4z - \frac{z^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{9\pi}{2}.$$

Uppgift 3

Skissera den geometriska figur i $\mathbb{R}^3$ som beskrivs av

$$\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ange kurvans tangentvektor och normalvektor i varje punkt samt beräkna kurvans båglängd som funktion av parameter t.

Lösningsförslag: Den givna kurvan är en helix, en spiralkurva. Observera att $x(t)^2+y(t)^2 = 4$ för varje t, medan $z(t)$ är en växande funktion.

Vi beräknar först tangentvektorn i varje punkt på parameterkurvan. Vi har

$$\vec{r}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 3)$$

och observerar att $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{13}$ för $t \in [0, 2\pi]$. Vi får från detta genast kurvans båglängd som funktion av parametern t:

$$\ell(t) = \int_0^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau = \sqrt{13}\int_0^t d\tau = \sqrt{13}t.$$

Kurvans båglängd är således en konstant multipel av den givna parametern t.

En normalvektor i en punkt på kurvan fås nu genom derivering:

$$\vec{r}''(t) = (-2\cos t, 2\sin t, 0).$$

Matematiska Institutionen, Stockholms Universitet, 106 91 Stockholm.
Email address: sola@math.su.se