STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Sofia Tirabassi

Exam / Tentamen
MM5024 Logik 7,5 hp
VT 2023
Tisdag, 2023-05-23

This exam consists of two parts. The basic part (grundläggande del) has 6 problems (1–6), worth a total of 20 points. The problem part (problemdel) has 3 problems (7–9), worth a total of 20 points. You can obtain a maximum of 40 points.

You may submit your answers in either English (pp. 2–3) or Swedish (pp. 4–5). In case of ambiguity the English text is the one that holds.

No aids are allowed besides paper and pen. Write clearly and motivate your answers carefully. All yes/no answers should be justified. You may use the soundness and completeness theorems (and any other theorems from the course), but state clearly when you do so.

——— Good luck! — Lycka till! ———

Written Exam (English)

Basic part

1 (4 pts) Give the cases for the following rules in the proof of soundness for predicate logic

(a) $\vee$-E

(b) $\forall$-I

You may use, if necessary, the following substitution lemma: for any formula φ and term t, with t free for x_i in φ, and for any structure $\mathcal{A}$ and valuation v for $\mathcal{A}$,

$$[\![\varphi[t/x_i]]\!]^{\mathcal{A},v} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v[x_i \mapsto [\![t]\!]^{\mathcal{A},v}]}.$$

2 Consider the formulas $\varphi \coloneqq (P_1 \to P_2) \wedge P_3$ and $\psi \coloneqq (P_1 \vee P_2) \to \neg P_3$.

(a) (1 pt) Give a model $\mathcal{V}$ where both φ and ψ are false

(b) (2 pts) Give two models $\mathcal{V}_1$ and $\mathcal{V}_2$ such that just φ holds in $\mathcal{V}_1$ and just ψ holds in $\mathcal{V}_2$

3 Consider the formula $\varphi \coloneqq P_1(x_1) \to (P_1(f_1) \wedge P_1(f_2))$ in the language of arity type $\langle\, 1\,;\, 0, 0\,\rangle$.

(a) (2 pts) Describe all the terms t which are free for x_1 in φ.

(b) (2 pts) Let t be free for x_i in φ. Show that $\varphi[t/x_i]$ has a countermodel.

4 Let t be a term, x_i a variable and $\varphi \coloneqq \exists x_j \psi$ for some formula ψ

(a) (1 pt) Define "t is free for x_i in φ"

(b) (1 pt) With $\psi \coloneqq \exists x_0 R_1(x_0)$, give, if possible, a term s and a variable x_i such that s is not free for x_i in ψ.

(c) (2 pts) Show that, for all variables x_i, we have that x_i is free for x_i in φ

5 (5 pts) Derive or find a countermodel, for each of the following:

(a) $\neg\exists x_0 \varphi \vdash \forall x_0 \neg\varphi$

(b) $\neg(P_1 \wedge P_2) \vdash P_2 \to \neg P_1$

(c) $\neg P_1 \to P_2 \vdash P_1 \vee \neg P_2$

Problem part

6 Consider the formula: $\varphi \coloneqq P_1(x_1) \to (P_1(f_1) \wedge P_1(f_2))$ in a language with arity type $\langle\, 1\,;\, 0, 0\,\rangle$

(a) (3 pts) Show that $\exists x_1 \varphi$ is a tautology

(b) (3 pts) Use the previous point and the fact that $\varphi[x_j/x_i]$ is never a tautology (according to question 3) to show that $\Gamma = \emptyset$ does not have the existence property.

7 Work over the arity type $\langle 2 ; \rangle$ (a single binary relation symbol). Let $\mathcal{R}$ be the structure $\langle S ; P ; \rangle$, with $S = \{a, b, c\}$ and $P = \{(x, y) \mid y \neq b\}$.

(a) (1 pt) Consider the formula $\varphi \coloneqq \forall x_1 (P(x_1, x_2) \to \forall x_1\, P(x_1, x_2))$. Give the variables and the free variables of φ

(b) (3 pts) If $v : \mathbb{N} \to S$ is such that $v(2) = c$, decide whether $\forall x_2\, \varphi$ holds in $(\mathcal{R}, v)$.

(c) (3 pts) Find another structure $\mathcal{R}' = \langle S ; P' ; \rangle$ with the same underlying set S, such that $(\mathcal{R}', v)$ believes $\neg\varphi$, with v as above.

8 (3 pts) Determine if it is possible to derive the following. If so, give a derivation.

$$\exists x_1 \exists x_2 \, (R_1(x_1, x_2) \vee R_1(x_2, x_1)) \,,\ \neg\exists x_1 R_1(x_1, x_2) \vdash \exists x_1 \exists x_2 \, (x_1 \doteq x_2)$$

9 (4 pts) Recall that a theory Γ is complete if, for every formula φ, we have that $\Gamma \vdash \varphi$ or$\Gamma \vdash \neg\varphi$

(a) Show that $\{P_1 \to P_2\}$ is not complete

(b) Show that any maximally consistent theory is complete

——— End of exam ———

Skriftligt prov (Svenska)

Grundläggande del

1 (4 pts) Ge fallen för följande regler i sundhetsbeviset för predikatlogik.

(a) $\vee$-E

(b) $\forall$-I

Du får använda, om nödvändigt, följande substitutionslemma: För varje formel φ och term t, så att t är fri för x_i i φ, och för varje tolkning $\mathcal{A}$, v,

$$[\![\varphi[t/x_i]]\!]^{\mathcal{A},v} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A},v\left[x_i \mapsto [\![t]\!]^{\mathcal{A},v}\right]}.$$

2 Betrakta formeln $\varphi \coloneqq (P_1 \to P_2) \wedge P_3$ och $\psi \coloneqq (P_1 \vee P_2) \to \neg P_3$.

(a) (1 pt) Ange en modell $\mathcal{V}$ där bägge är falska

(b) (2 pts) Ange två modeller $\mathcal{V}_1$ och $\mathcal{V}_2$ sådana att bara φ gäller i $\mathcal{V}_1$ och bara ψ gäller i $\mathcal{V}_2$

3 Beträkta formeln $\varphi \coloneqq P_1(x_1) \to (P_1(f_1) \wedge P_1(f_2))$ i språket med ställighetstypen $\langle\, 1\,;\, 0, 0\,\rangle$.

(a) (2 pts) Beskriv alla termer t som är fria för x_i i φ.

(b) (2 pts) Låt t vara fri för x_i i φ. Hitta en motmodell för $\varphi[t/x_i]$.

4 Låt t vara en term, x_i en variabel, och $\varphi \coloneqq \exists x_j \psi$ for någon formel ψ

(a) (1 pt) Definiera "t är fri för x_i in φ"

(b) (1 pt) Med $\psi \coloneqq \exists x_0 R_1(x_0)$, ange en term s och variabel x_i sådan att s är fri för x_i i ψ.

(c) (2 pts) Visa att, för alla variabler x_i, har vi att x_i är fri för x_i i φ.

5 (5 pts) Visa ett harledning eller hitta en motmodell, för var och en av följande:

(a) $\neg\exists x_0 \varphi \vdash \forall x_0 \neg\varphi$

(b) $\neg(P_1 \wedge P_2) \vdash P_2 \to \neg P_1$

(c) $\neg P_1 \to P_2 \vdash P_1 \vee \neg P_2$

Problemdel

6 Beträkta formeln $\varphi \coloneqq P_1(x_1) \to (P_1(f_1) \wedge P_1(f_2))$ med ställighetstypen $\langle\, 1\,;\, 0, 0\,\rangle$

(a) (3 pts) Visa att $\exists x_1 \varphi$ är en tautologi

(b) (3 pts) Använd den föregående punkten och faktumet att $\varphi[x_j/x_i]$ aldrig är en tautologi (enligt fråga 3) för att visa att $\Gamma = \emptyset$ har inte existensegenskapen.

7 Arbeta med ställighetstypen $\langle\, 2\,;\, \rangle$ (en enda tvåställig relationssymbol). Låt $\mathcal{R}$ vara strukturen $\langle\, S\,;\, P\,;\, \rangle$, med $S = \{a, b, c\}$ och $P = \{(x, y) \mid y \neq b\}$.

(a) (1 pt) Betrakta formeln $\varphi \coloneqq \forall x_1\,(P(x_1,x_2) \to \forall x_1\, P(x_1,x_2))$. Ange variablerna och fria variablerna av φ

(b) (3 pts) Om $v : \mathbb{N} \to S$ är sådan att $v(2) = c$, bestäm om $\forall x_2\, \varphi$ gäller i $(\mathcal{R}, v)$.

(c) (3 pts) Hitta en annan struktur $\mathcal{R}' = \langle\, S\,;\, P'\,;\ \rangle$ med samma individområdet S, sådan att $(\mathcal{R}', v)$ tror $\neg\varphi$, med v som ovan.

8 (3 pts) Bestäm om det är möjligt att härleda var och en av följande. Om ja, ange ett härledning.

$$\exists x_1 \exists x_2\,(R_1(x_1,x_2) \vee R_1(x_2,x_1))\,,\ \neg\exists x_1 R_1(x_1,x_2) \vdash \exists x_1 \exists x_2\,(x_1 \doteq x_2)$$

9 (4 pts) Påminn att en teori Γ kallas för fullstanding om, för varje φ, har vi att $\Gamma \vdash \varphi$ eller $\Gamma \vdash \neg\varphi$

(a) Visa att $\{P_1 \to P_2\}$ inte är fullständig.

(b) Visa att varje maximält consistent teori är fullständig.

——— Slut på provet ———